Lösung zu Aufgabe 1 **Physik-Prüfung WS 01/02**

a) Bei 50 km/h ist der Reaktionsweg $s_R = v_0 \cdot t = 13{,}9\ \text{m}$

Die konstante Bremsverzögerung $a_0 = \dfrac{F_0}{m} = 3{,}37\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

ergibt einen Bremsweg $s_B = \dfrac{v_0{}^2}{2a_0} = 28{,}6\ \text{m}$

Der Anhalteweg ist $\underline{x_2} = s_R + s_B = \underline{42{,}5\ \text{m}}$

b) Bei 60 km/h ist der Reaktionsweg $s'_R = 16{,}7\ \text{m}$.
Es bleibt der Weg $s'_B = x_2 - s'_R = 25{,}8\ \text{m}$ übrig.
Die Bremszeit t_B erhält man aus der quadratischen Gleichung
$s'_B = v_0 \cdot t_B - \dfrac{1}{2} a_0 \cdot t_B{}^2$ mit $t_B = 1{,}92\ \text{s}$.
Bem.: Die konstante Bremsbeschleunigung ist negativ, also $a = - a_0$.

Damit folgt für die Geschwindigkeit v_2 in x_2:
$\underline{v_2} = v_0 - a_0 \cdot t_B = \underline{36{,}8\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}}$

c) Bei vorgegebener Bremszeit t_B ergibt sich für v_3,
wobei wieder gilt $a(t) = -\dfrac{F(t)}{m}$, denn $F(t) > 0$.

$$\underline{v_3(t = t_B)} = v_0 + \int_0^{t_B} a(t)\ dt = v_0 - \frac{F_0}{2 \cdot m} \int_0^{t_B} \left[1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{t_B}\right)\right] dt$$

$$= v_0 - \frac{F_0}{2 \cdot m} \left[t - \frac{t_B}{\pi} \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{t_B}\right)\right]_0^{t_B} = v_0 - \frac{F_0}{2 \cdot m}\, t_B$$

$$= 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - \frac{1600\ \text{N}}{2 \cdot 950\ \text{kg}}\, 1{,}92\ \text{s}$$

$$= 16{,}7\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} - 3{,}23\ \text{ms}^{-1} = 13{,}47\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$= \underline{48{,}5\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

a) Aus dem 2. Newtonschen Axiom $\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_1\,(v_1' - v_1)}{\Delta t}$

folgt für die Geschwindigkeit des Balls nach dem Stoss

$$v_1' = v_1 + \frac{\overline{F}\ \Delta t}{m} = 30\ \text{m/s} + \frac{(-\ 4.67 \cdot 10^3\ \text{N})(10^{-3}\,\text{s})}{(0.08\ \text{kg})} = -\ 28.4\ \text{m/s}\,.$$

Bem.: Die Durchschnittskraft $\overline{F}$ auf den Ball zeigt in die negative x-Richtung.

b) Aus dem Impulserhaltungssatz $m_1\,v_1 = m_1\,v_1' + m_2\,v_S$ folgt die Translationsgeschwindigkeit v_S des Stabschwerpunkts zu

$$v_S = \frac{m_1\,(v_1' - v_1)}{m_2} = \frac{(0.080\ \text{kg})\ [30\ \text{m/s} - (-\ 28.4\ \text{m/s})]}{(5\ \text{kg})} = 0.934\ \text{m/s}\,.$$

Der Drehimpulserhaltungssatz $m_1\,v_1\,r = m_1\,v_1'\,r + J\,\omega$ liefert die Winkelgeschwindigkeit ω des Stabs.

$$\omega = \frac{m_1\ r\ (v_1 - v_1')}{J} = \frac{(0.080\ \text{kg})\ (0.1\,\text{m})\ [30\ \text{m/s} - (-\ 28.4\ \text{m/s})]}{\frac{1}{12}\ (5\ \text{kg})\ (0.4\ \text{m})^2} = 7.01\,\text{rad/s}$$

c) In der x,y-Ebene gibt es keine äusseren Kräfte und deshalb auch keine äusseren Drehmomente auf das System der beiden Massen. Also ist $\sum \vec{F}_{i,ext} = 0$ und $\sum \vec{M}_{i,ext} = 0$ und es gelten somit beide Erhaltungssätze.

d) Obwohl die Durchschnittskraft $\overline{F}$ nicht im Stabschwerpunkt angreift, lässt sich die Translationsgeschwindigkeit des Stabs auch direkt über das 2. Newtonsche Axiom bestimmen.

$$v_S = \frac{\overline{F}\ \Delta t}{m_2} = \frac{(4.67 \cdot 10^3\ \text{N})(10^{-3}\,\text{s})}{(5\ \text{kg})} = 0.934\ \text{m/s}$$

Bem.: Die Durchschnittskraft $\overline{F}$ auf den Stab zeigt in die positive x-Richtung.
Das 2. Newtonsche Axiom für Drehbewegungen $\overline{M} = \Delta L/\Delta t$ liefert hier mit $\Delta L = J\,\omega$ die Winkelgeschwindigkeit ω nach dem Stoss.

$$\omega = \frac{\overline{M}\ \Delta t}{J} = \frac{\overline{F}\ r\ \Delta t}{J} = \frac{(4.67 \cdot 10^3\ \text{N})\ (0.1\,\text{m})\ (10^{-3}\,\text{s})}{\frac{1}{12}\ (5\ \text{kg})\ (0.4\ \text{m})^2} = 7.01\,\text{rad/s}$$

Bem.: Die Teilaufgaben b) und d) liefern wie erwartet die gleichen Zahlenwerte für v_s und ω.

a) Die drei Körper können als Punktmassen betrachtet werden, die Koordinaten (x_i, y_i), i=1, 2, 3 werden aus der Skizze abgelesen.

m_1 bei (0 m,0 m); m_2 bei (2 m,1 m); m_3 bei (-1 m,3 m).

Berechnung der Koordinaten des Massenmittelpunktes (x_s, y_s)

$$x_s = \frac{x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{2\,\text{m} \cdot 5\,\text{kg} + (-1\text{m}) \cdot 7\,\text{kg}}{2\,\text{kg} + 5\,\text{kg} + 7\,\text{kg}} = 0{,}214\,\text{m}$$

$$y_s = \frac{y_2 m_2 + y_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{1\text{m} \cdot 5\,\text{kg} + 3\,\text{m} \cdot 7\,\text{kg}}{2\,\text{kg} + 5\,\text{kg} + 7\,\text{kg}} = 1{,}86\,\text{m}$$

b) Gesamtes Massenträgheitsmoment J_A bezüglich des Drehpunktes A.
(m_1 liegt in der Drehachse, daher ist J_1 = 0 kg m^2)

$J_A = J_1 + J_2 + J_3 = m_2\, a^2 + m_3\, b^2 = 5$ kg (2,24 m)^2 + 7 kg (3,16 m)^2 = 95,0 kg m^2.

c) Abstand zwischen Massenmittelpunkt (x_s, y_s) und Drehpunkt A (0,0)

$$d = \sqrt{x_s^2 + y_s^2} = 1{,}87\text{ m.}$$

Für ein physikalisches Pendel gilt bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{2,3}\; g\, d}{J_A}} = \sqrt{\frac{12\,\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1{,}87\,\text{m}}{94{,}98\,\text{kgm}^2}} = 1{,}52\,\frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \text{und}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1{,}64\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 4{,}13\text{ s .}$$

d) Für die gedämpfte Schwingung ist

$$T_D = \frac{T_0}{\sqrt{1 - D^2}} = \frac{4{,}13\ \text{s}}{\sqrt{1 - 0{,}15^2}} = 4{,}17\text{ s .}$$

Der Auslenkwinkel φ der gedämpften Schwingung für den Zeitpunkt (t+2T_D), zwei Schwingungsperioden T_d nach dem Zeitpunkt t, hat die Grösse

$$\varphi(t + 2T_d) = \varphi(t)\, e^{-\delta 2 T_d}\,.$$

Mit $\varphi(0) = \varphi_{max}$ gilt damit $\varphi_{max}(2T_d) = \varphi_{max} e^{-\delta 2 T_d}$. Für $\delta = D\,\omega_0 = 0{,}15 \cdot 1{,}52\,\text{rad/s} = 0{,}228\ \text{s}^{-1}$ wird die prozentuale Abnahme des maximalen Auslenkwinkels

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_{max}} 100\% = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{max}(2T_d)}{\varphi_{max}} 100\% = \frac{\varphi_{max} - \varphi_{max}\ e^{-\delta 2 T_d}}{\varphi_{max}} 100\%$$

$$= 1 - e^{-0{,}228\frac{1}{\text{s}}\ 2\ 4{,}17\,\text{s}}\ 100\% = 85\%.$$

Lösung zu Aufgabe 4 **Physik-Prüfung WS01/02**

a) Mit den statistischen Funktionen eines Taschenrechners ergibt sich Mittelwert und Standardabweichung der gemessenen Schwingungsdauern zu

T / s
1.787
1.770
1.785
1.793
1.773
1.775

$\overline{T} = 1.7805 \text{ s}$
$s = 0.00912 \text{ s}$

Der mittlere Fehler des Mittelwerts ist dann

$\Delta\overline{T} = \dfrac{s}{\sqrt{N}} = 0.00372 \text{ s}$, wobei hier N = 6 ist.

Endergebnis:

$\overline{T} = (1.781 \pm 0.004) \text{ s}$

b) Der g-Wert ergibt sich nun aus der Gleichung für die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendel $T = 2\pi\,\sqrt{L/g}$.

$$g = \frac{4\pi^2 L}{\overline{T}^2} = \frac{4\pi^2\ (0.799 \text{ m})}{(1.781 \text{ s})^2} = 9.950 \text{ m/s}^2$$

c) Bei der Gleichung für den g-Wert handelt es sich um ein reines Potenzgesetz. In diesem Fall liefert das GAUßsche Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\ \frac{\Delta T}{T}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.1 \text{ cm}}{79.9 \text{ cm}}\right)^2 + \left(2\ \frac{0.004 \text{ s}}{1.781 \text{ s}}\right)^2}$$

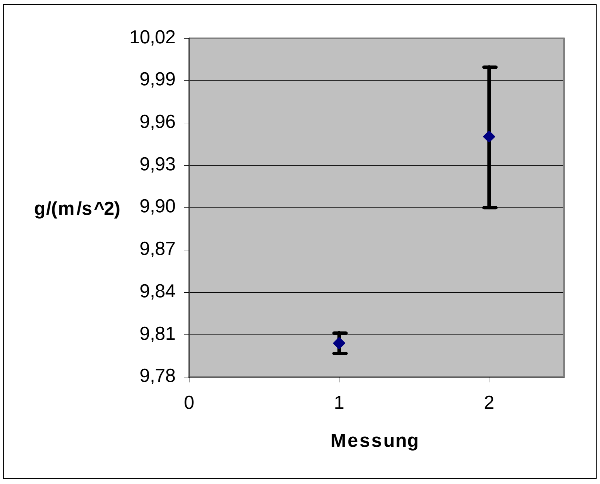
$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{1.566 \cdot 10^{-6} + 20.18 \cdot 10^{-6}} = 4.663 \cdot 10^{-3}.$$

Daraus folgt der absolute Fehler zu

$$\Delta g = (4.663 \cdot 10^{-3})\ g = (4.663 \cdot 10^{-3})\ (9.950 \text{ m/s}^2) = 0.0464 \text{ m/s}^2.$$

Sinnvoll gerundet lautet das Endergebnis lautet dann $g = (9.95 \pm 0.05) \text{ m/s}^2$.

d) Zunächst ist festzustellen, dass sich die Fehlerbalken der Messungen $g = (9.804 \pm 0.007) \text{ m/s}^2$ und $g = (9.95 \pm 0.05) \text{ m/s}^2$ nicht überlappen. Der wahre Wert einer Messgrösse liegt aber immer nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit im angegebenen Toleranzintervall (z.B. mit 68 % bei $\pm\sigma$ bzw. mit 99.7 % bei $\pm 3\sigma$). Im Rahmen der Statistik stimmen die beiden Messungen also gerade noch überein, denn bei 3 σ überlappen die Fehlerbalken. Aufgrund des wesentlich kleineren Toleranzintervalls müsste man jedoch der Messung 1 mehr Vertrauen schenken. Diese Interpretation wird durch die Tatsache bestätigt, dass der wahre Wert im Physiklabor der FHTE bekannt ist ($g_{Essl} = 9.806 \text{ m/s}^2$).



Lösung zu Aufgabe 5

Physik-Prüfung WS 01/02

a) Für die Anfangsposition der Kugel in der Höhe h und für die Endposition h_2 der Kugel am Ort 2 gilt der Energieerhaltungssatz der Mechanik (keine Reibung)

Gesamtenergie der Kugel in der Anfangshöhe h

$$E_{Ges} = E_{pot} = m_K\, g\, h$$

Gesamtenergie der Kugel am Ort (2)

$$E_{Ges} = E_{pot} + E_{Kin,Rot} + E_{Kin,Trans}$$

mit h_2=2 (R - r) $E_{Ges} = m_K\, g\, 2\,(R - r) + \frac{1}{2} J_K\, \omega_2{}^2 + \frac{1}{2} m_K\, v_2{}^2\,.$

Mit R>>r folgt aus dem Energieerhaltungssatz

$$m_K\, g\, h = m_K\, g\, 2R + \frac{1}{2} J_K\, \omega^2 + \frac{1}{2} m_K\, v^2\,.$$

Mit $J_K = \frac{2}{5} m_K\, r^2$ und der Rollbedingung $\omega_2 = \frac{v_2}{R}$

ergibt sich $h_2 = 2R + \frac{7}{10} \frac{v_2{}^2}{g}\,.$

Damit die Kugel am Ort (2) auf der Bahn bleibt, muss die Zentrifugalkraft mindestens gleich der Gewichtskraft sein

$$F_G = F_Z \qquad \text{bzw.} \qquad m_K\, g = \frac{m_K\, v_2^2}{R}\,.$$

Daraus errechnet sich

$$v_2{}^2 = g\,R\,.$$

Eingesetzt in den Energiesatz folgt

$$h_2 = 2R + \frac{7}{10} \frac{g\,R}{g} = \frac{27}{10} R = 33{,}8\,\text{cm}\,.$$

b) Für das Kräftegleichgewicht am Ort (1) gilt

$$F_{Bahn} = F_Z = \frac{m_K\, v_1^2}{R - r}$$

Mit der Geschwindigkeit v_1 am Ort (1) und der Höhe $h_1 = (R - r) \approx R$ folgt bei erneuter Anwendung des Energieerhaltungssatzes und umstellen nach $v_1{}^2$

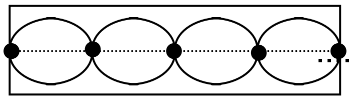
$$v_1^2 = \frac{10}{7} g\,(h - R)\,.$$

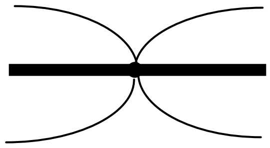
Damit wird der Betrag der Kraft der Bahn auf die Kugel

$$F_{Bahn} = \frac{m_K \frac{10}{7} g\,(h - R)}{R} = \frac{0{,}0311\,\text{kg} \cdot \frac{10}{7} \cdot 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0{,}338\,\text{m} - 0{,}125\,\text{m})}{0{,}125\,\text{m}} = 0{,}743\ \text{N}$$

Die Kraft ist zum Mittelpunkt der Loopingbahn hin gerichtet.

.

a)  ....3. Oberschwingung im Rohr (f_3)

 ....Grundschwingung im Messingstab

b) Die Rohrlänge L_R entspricht der doppelten Wellenlänge λ_3 bei der Frequenz f_3:

$$\underline{f_3} = \frac{c_L}{\lambda_3} = \frac{340\ m \cdot s^{-1}}{0{,}0965\ m} = \underline{3523\ s^{-1}}$$

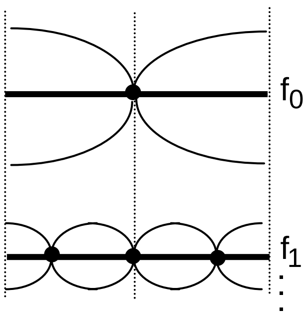
f_3 in Luft ist gleich f_0 in Messing

c) Die Länge der Messingstange L_M entspricht der halben Wellenlänge bei der Frequenz $f_{0\ Messing}$. Die Schallgeschwindigkeit c_M in Messing ist

$$\underline{c_M} = f_0 \quad \lambda_{Messing} = f_0 \quad 2 \quad L_M = 3523\ s^{\ 1} \quad 1\,m = \underline{3523\ m \quad s^{\ 1}}$$

d) Aus der Beziehung $c_M = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ erhält man den E-Modul für Messing:

$$E = 1{,}03 \cdot 10^{11}\ N \cdot m^{-2}$$

e) 

Bei zwei losen Enden und einem Knoten in der Stabmitte gilt für die Obertöne

$$\underline{f_n = (2 \cdot n + 1) f_0} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

bzw. mit $\lambda_n = \frac{2 \cdot L_M}{2n + 1}$: $\quad f_n = \frac{c_M (2n+1)}{2 \cdot L_M}$

a) Die Zustandsgleichung idealer Gase, angewandt auf den Zustand (1) liefert die Stoffmenge

$$n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_1} = \frac{(10^5 \text{ Nm})\,(2 \cdot 10^{-3} \text{m}^3)}{[8.31 \text{ J}/(\text{mol K})]\,(293\text{K})} = 0.0821 \text{ mol}\,.$$

b) Die mittlere kinetische Translationsenergie eines Moleküls ist $\bar{\varepsilon}_{kin} = (f/2)\, k\, T$, wobei f = Anzahl der Freiheitsgrade und k = BOLTZMANN-Konstante ist. Für Helium ist f =3. Somit ergibt sich

$$\bar{\varepsilon}_{kin}(T_1) = \frac{3}{2}\, k\; T_1 = \frac{3}{2}\,(1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J}/\text{K})\;(293 \text{ K}) = 6.07 \cdot 10^{-21} \text{ J}\,.$$

Die innere Energie U im Zustand (1) ist dann

$$U_1 = N\, \bar{\varepsilon}_{kin} = n\, N_A\, \bar{\varepsilon}_{kin} = (0.0821 \text{ mol})(6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})(6.07 \cdot 10^{-21} \text{J}) = 300 \text{ J}\,.$$

c) '1'$\rightarrow$'2' : isobare Kompression,

'2'$\rightarrow$'3' : isochore Erwärmung,

'3'$\rightarrow$'1' : isotherme Expansion.

d) Für die isobare ZÄ von 1 $\rightarrow$ 2 gilt $V_2/V_1 = T_2/T_1$ und somit ist

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1}\, T_1 = \frac{1}{4}\,(293\text{K}) = 73.3 \text{ K}\,.$$ Ausserdem ist $T_3 = T_1 = 293\text{K}$ (isotherme ZÄ).

e) Der thermodynamische Wirkungsgrad $\eta = |W_{ges}| / Q_{zu}$ hängt nur von der pro Zyklus abgegebenen Nutzarbeit W_{ges} und der pro Zyklus zugeführten Wärme Q_{zu} ab. Mit den Einzelgrössen

$$W_{31} = -\, n\, R_m\; T_3\, \ln\frac{V_2}{V_1} = -\,(0.0821 \text{ mol})[8.31 \text{ J}/(\text{mol K})](293 \text{ K})\, \ln 4 = -277 \text{ J}\,,$$

$$W_{12} = p_1\,(V_1 - V_2) = (10^5 \text{ N}/\text{m}^2)\,\frac{3}{4}\,(2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3) = 150 \text{ J}\,,$$

ergibt sich $W_{ges} = W_{12} + W_{23} + W_{31}$ = 150 J – 277 J = -127 J, da $W_{23} = 0$.

Für die Wärmen erhält man

$$Q_{23} = n\, C_{mv}\; \Delta T = (0.0821 \text{ mol})\,\frac{3}{2}\,[8.31 \text{ J}/(\text{mol K})]\;(293 \text{ K} - 73.3 \text{ K}) = 225 \text{ J}$$

$$Q_{31} = -\; W_{31} = -\; 277 \text{ J}\,,$$

so dass $Q_{zu} = Q_{23} + Q_{31}$ = 225 J + 277 J = 502 J. Somit ist

$$\eta = \frac{|W_{ges}|}{Q_{zu}} = \frac{127 \text{ J}}{502 \text{ J}} = 0.25 \mathrel{\hat{=}} 25\ \%\,.$$

Bem.: Mit $Q_{ab} = Q_{12} = n\, C_{mp}\, \Delta T = n\, 5/2\, R_m\, (T_2 - T_1)$ = - 375 J kann man $|W_{ges}| = |Q_{zu}| - |Q_{ab}|$ = 502 J – 375 J = 127 J ebenfalls berechnen.

Im Vergleich zur obigen Wärmekraftmaschine hat eine Carnot-Maschine zwischen T_1 und T_2 den Wirkungsgrad $\eta = (1 - T_2/T_1)$ = (1 – 73.3 K / 293 K) = 0.75, also 75 %