Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 1

(a) Die mittlere kinetische Energie der <u>Translation</u> eines Moleküls hängt nur von der absoluten Temperatur T ab; es gilt

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{kin}} = \frac{3}{2}kT \qquad \text{BOLTZMANN-Konstante } k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1}$$

Die Anfangstemperatur T_1 erhält man aus der Zustandsgleichung eines idealen Gases für den Zustand '1'; also

$$p_1 V_1 = n R_{\mathrm{m}} T_1$$

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{n R_{\mathrm{m}}} = \frac{10^5\ \mathrm{Nm}^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{1\,\mathrm{mol} \cdot 8{,}31\,\mathrm{Jmol}^{-1}\mathrm{K}^{-1}} = 300{,}8\ \mathrm{K}$$

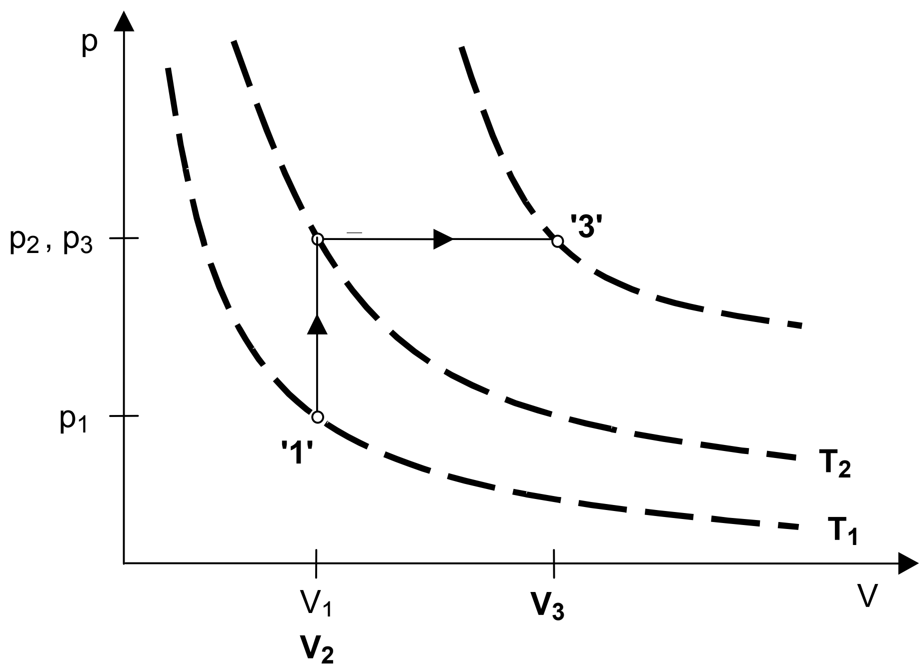
Für die Anfangstemperatur T_1 wird

$$\bar{\varepsilon}_{\mathrm{kin}}(T_1) = \frac{3}{2}kT_1 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{JK}^{-1} \cdot 301\,\mathrm{K} = 6{,}23 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}$$

(b) Die beiden beschriebenen speziellen Zustandsänderungen sind

Prozess $'1' \rightarrow '2'$: isochor; mit $V_2 = V_1$; $p_2 = \frac{7}{5}p_1$; $T_2 > T_1$.

Prozess $'2' \rightarrow '3'$: isobar; mit $p_3 = p_2 = \frac{7}{5}p_1$; $V_3 = \frac{3}{2}V_2 = \frac{3}{2}V_1$; $T_3 > T_2$.



Skizze des p,V-Diagramms (nicht maßstäblich); eingezeichnet sind als Hilfslinien die Isothermen für die Temperaturen T_1, T_2 und T_3.

(c) Bestimmung der Temperatur T_2

Bei einer isochore Zustandsänderung vereinfacht sich – für ein geschlossenes

System – die Zustandsgleichung eines idealen Gases auf

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Also gilt für den Prozess $'1' \rightarrow '2'$

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1} \qquad \text{mit der Zusatzforderung } p_2 = \frac{7}{5} p_1 \text{ wird daraus}$$

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} \cdot T_1 = \frac{\frac{7}{5} p_1}{p_1} \cdot T_1 = \frac{7}{5} T_1 = \frac{7}{5} \cdot 301\,\text{K} = 421\,\text{K}$$

Bestimmung der Temperatur T_3

Geht man vom Zustand $'2'$ aus, dann ergibt sich die Temperatur im Zustand ‘3‘ aus der Forderung ’isobare Prozessführung‘ für den Prozess $'2' \rightarrow '3'$. Die Zustandsgleichung vereinfacht sich auf

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \qquad \frac{V_3}{T_3} = \frac{V_2}{T_2}$$

mit der Zusatzforderung

$$V_3 = \frac{3}{2} V_2 = \frac{3}{2} V_1$$

wird damit

$$T_3 = \frac{V_3}{V_1} \cdot T_2 = \frac{\frac{3}{2} V_1}{V_1} \cdot T_2 = \frac{3}{2} \cdot T_2 = \frac{3}{2} \cdot 421\,\text{K} = 632\,\text{K}$$

Alternativer Lösungsweg

Will man die Benutzung eines Zwischenergebnisses (hier der Temperatur T_2) vermeiden, dann nutzt man die Zustandsgleichung idealer Gase für den Zustand $'3'$; denn für einen Zustand ist es unerheblich auf welchen thermodynamischen Weg er erreicht wurde. Also gilt

$$p_3 V_3 = n R_\text{m} T_3$$

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{n R_\text{m}} = \frac{(\frac{7}{5} p_1)(\frac{3}{2} V_1)}{n R_\text{m}} = \frac{1{,}4 \cdot 10^5\ \text{Nm}^{-2} \cdot 1{,}5 \cdot 25 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3}{1\,\text{mol} \cdot 8{,}31\,\text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 632\,\text{K}$$

Zwischenüberlegung für die Teilaufgaben (c) und (d)

Die Ergebnisse dieser Teilaufgaben (d) und (e) sind nicht unabhängig voneinander. Die Änderung der inneren Energie ΔU, die umgesetzte Wärme Q_{AE} und die umgesetzte Arbeit W_{AE} sind über den 1. Hauptsatz miteinander verknüpft; es gilt allgemein

$$\Delta U = U_{\mathrm{E}} - U_{\mathrm{A}} = Q_{\mathrm{AE}} + W_{\mathrm{AE}}$$

Hat man zwei der physikalischen Größen unabhängig voneinander bestimmt, dann erhält man die Dritte aus dem 1. Hauptsatz. Zur Probe kann natürlich dann die dritte Größe ebenfalls unabhängig bestimmt werden.

Dabei ist die Änderung der inneren Energie nur abhängig von der Temperaturdifferenz der beiden Zustände, gemäß

$$\Delta U = n C_{\mathrm{mv}} (T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{A}})$$

Für die Volumenänderungsarbeit gilt allgemein

$$W_{\mathrm{AE}} = -\int_{V_{\mathrm{A}}}^{V_{\mathrm{E}}} p(V)\,\mathrm{d}V$$

Bei der Bestimmung der zugeführten Wärmen benötigt man die **molaren Wärmekapazitäten** C_{mv} und C_{mp}. Diese bestimmen sich aus den Freiheitsgraden eines idealen zweiatomigen Gases. Nimmt man für das zweiatomiges Gas an, dass im betrachteten Temperaturbereich auch die Freiheitsgrade der Rotation angeregt sind, dann ist die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f_{\mathrm{ges}} = f_{\mathrm{trans}} + f_{\mathrm{rot}} = 3 + 2 = 5$$

Die molare isochore Wärmekapazität C_{mv} bestimmt sich aus f_{ges} zu

$$C_{\mathrm{mv}} = \frac{f_{\mathrm{ges}}}{2} R_{\mathrm{m}} = \frac{5}{2} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} = 20{,}78\ \mathrm{J mol^{-1} K^{-1}}$$

Die molare isobare Wärmekapazität C_{mp} bestimmt sich aus f_{ges} zu

$$C_{\mathrm{mp}} = \frac{f_{\mathrm{ges}} + 2}{2} R_{\mathrm{m}} = \frac{7}{2} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} = 29{,}10\ \mathrm{J mol^{-1} K^{-1}}$$

(c) Für den isochoren Prozess $'1' \to '2'$ liefert der 1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$U_2 - U_1 = \Delta U = Q_{12} + W_{12}$$

mit

$$W_{12} = 0$$

(keine Volumenänderungsarbeit; das Volumen des Gases ändert sich nicht).

Die zugeführte Wärme erhöht die innere Energie des Gases gemäß

$$\begin{aligned}\Delta U = Q_{12} &= n C_{\mathrm{mv}} (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{5}{2} R_{\mathrm{m}} \cdot (T_2 - T_1)\\ &= 1\,\mathrm{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} \cdot (421 - 301)\,\mathrm{K}\\ &= 2\,493\ \mathrm{J}\end{aligned}$$

(d) für den isobaren Prozess $'2' \to '3'$ gilt
für die zugeführte Wärme

$$Q_{23} = nC_{\mathrm{mp}}(T_3 - T_2) = n \cdot \frac{7}{2} R_{\mathrm{m}} \cdot (T_2 - T_1)$$

$$= 1\,\mathrm{mol} \cdot \frac{7}{2} \cdot 831\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} \cdot (632 - 421)\,\mathrm{K}$$

$$= 6\,137\ \mathrm{J}$$

Für die Volumenänderungsarbeit beim Teilprozess $'2' \to '3'$ gilt für den isobaren Prozess $'2' \to '3'$ mit $p(V) = p_2 = \frac{7}{5} \cdot p_1 = \mathrm{const.}$

$$W_{23} = -p_2 \int_{V_1}^{V_3} \mathrm{d}V = -\frac{7}{5} \cdot p_1 \cdot (V_3 - V_1) = -\frac{7}{5} \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \cdot (\frac{3}{2} - 1) \cdot 25 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3 = -1750\ \mathrm{J}$$

Probe über den 1. Hauptsatz der Wämelehre

$$U_3 - U_2 = \Delta U = Q_{23} + W_{23} = (6137 - 1750)\ \mathrm{J} = 4\,387\ \mathrm{J}$$

Die Änderung der inneren Energie $(U_3 - U_2)$ kann über die Temperaturdifferenz $(T_3 - T_2)$ bestimmt werden. Man erhält

$$\Delta U = nC_{\mathrm{mv}}(T_3 - T_2) = n \cdot \frac{5}{2} R_{\mathrm{m}} \cdot (T_3 - T_2)$$

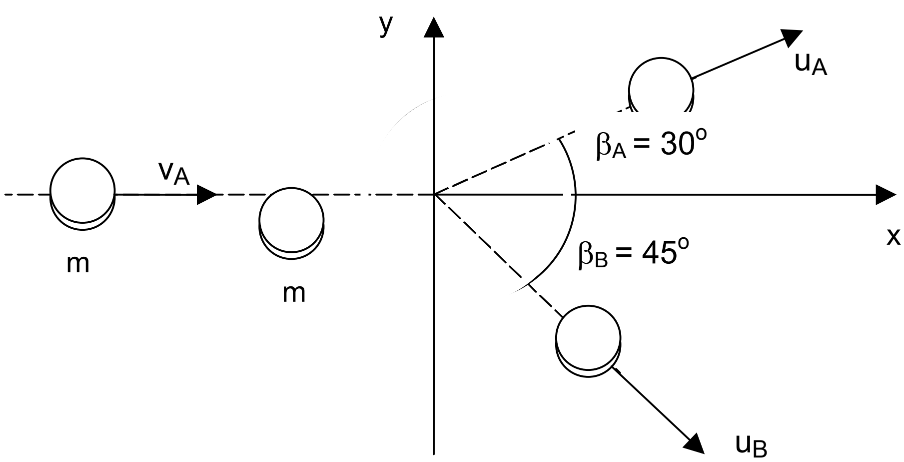
$$= 1\,\mathrm{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.31\,\mathrm{J mol^{-1} K^{-1}} \cdot (632 - 421)\,\mathrm{K}$$

$$= 4\,384\ \mathrm{J}$$

Die geringfügige Abweichung erklärt sich aus Rundungsfehlern bei den verschiedenen Rechnungsgängen.

Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 2

(a) Geometrie des Zusammenstosses



Der beschriebene Stoßprozess spielt sich in einer Ebene ab. Man führt deshalb ein karthesisches Koordinatensystem ein und wählt zweckmäßigerweise als *x*-

Koordinatenrichtung die Bewegungsrichtung des ankommenden Pucks 'A'.

Zwischen den beiden Stoßpartnern wirken beim Stoß nur innere Kräfte, deshalb ändert sich der Gesamtimpuls $\vec{p}_{\text{ges}}$ der beiden Stoßpartner beim Zusammenstoß nicht, denn nach NEWTON gilt

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad \text{wegen } \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \qquad \text{gilt} \qquad \Delta\vec{p} = \vec{0} \qquad \text{und} \qquad \vec{p} = \text{const.}$$

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \vec{p}(\text{A})_{\text{vor}} + \vec{p}(\text{B})_{\text{vor}} = \vec{p}(\text{A})_{\text{nach}} + \vec{p}(\text{B})_{\text{nach}}$$

die Anwendung des Erhaltungsatzes des Impulses für die *x*- und *y*-Koordinatenrichtung liefert zwei Gleichungen.

Vor dem Stoß war der Impuls in *y*-Koordinatenrichtung $p_y = 0$; d.h. nach dem Stoß muss ein Puck (für die gewählte Geometrie der obigen Abbildung also Puck 'A') in die positive, der andere (hier Puck 'B') in die negative *y*-Richtung fliegen, damit die Summe wieder Null ergeben kann.

Die beiden Richtungsangaben β_A und β_B der beiden Pucks nach dem Zusammenstoß liefern zwei weitere Bedingungen für die Geometrie. Damit hat man insgesamt vier Beziehungen; dies ist ausreichend um die jeweils zwei Geschwindigkeits-Komponenten der Pucks 'A' und 'B' nach dem Stoß zu berechnen.

Der Energiesatz in seiner mechanischen Fassung ist nachgeordnet. Die Verluste an mechanischen Energieformen – hier kinetische Energien – können anschließend bestimmt werden.

Erhaltung des Impulses in x-Richtung

$$\text{mv}_{\text{A}} = \text{mv}_{\text{Ax}} = \text{mu}_{\text{Ax}} + \text{mu}_{\text{Bx}}$$

mit den geometrisch-trigonometrischen Bedingungen

$$u_{\text{Ax}} = u_{\text{A}} \cdot \cos(30^\circ) \text{ und } \qquad u_{\text{Bx}} = u_{\text{B}} \cdot \cos(-45^\circ)$$

Erhaltung des Impulses in y-Richtung

$$0 = mu_{\text{Ay}} + mu_{\text{By}}$$

mit den geometrisch-trigonometrischen Bedingungen

$$u_{\text{Ay}} = u_{\text{A}} \cdot \sin(30^\circ) \qquad \text{und} \qquad u_{\text{By}} = u_{\text{B}} \cdot \sin(-45^\circ)$$

Eine Lösung – beinahe ohne Benutzung des Taschenrechners – erhält man mit der alten Merkregel für die Sinus- bzw. Kosinus-Funktion

Sinus-Funktionswerte	Kosinus-Funktionswerte
$\sin(0^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} = 0$	$\cos(0^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$
$\sin(30^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{2}$	$\cos(30^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$
$\sin(45^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$	$\cos(45^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$
$\sin(60^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$	$\cos(60^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1} = \frac{1}{2}$
$\sin(90^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4} = 1$	$\cos(90^{\circ}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0} = 0$

Nach Einsetzen erhält man – die Massen m der beiden identischen Pucks sind gleich – sofort zwei Beziehungen für die Beträge u_{A} und u_{B} der Geschwindigkeiten der Pucks nach dem Stoß

x-Richtung

$$v_{\mathrm{A}} = u_{\mathrm{A}} \cdot \cos(30^{\circ}) + u_{\mathrm{B}} \cdot \cos(-45^{\circ}) = u_{\mathrm{A}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + u_{\mathrm{B}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

y-Richtung

$$0 = u_{\mathrm{Ay}} = u_{\mathrm{A}} \cdot \sin(30^{\circ}) + u_{\mathrm{B}} \cdot \sin(-45^{\circ}) = u_{\mathrm{A}} \cdot (\frac{1}{2}) + u_{\mathrm{B}} \cdot (-\frac{1}{2}\sqrt{2})$$

oder daraus sofort

$$u_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} \cdot u_{\mathrm{B}}$$

dies eingesetzt in die Impulsbeziehung für die *x*-Richtung liefert

$$v_{\mathrm{A}} = \sqrt{2}\, u_{\mathrm{B}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + u_{\mathrm{B}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\, u_{\mathrm{B}}$$

$$u_{\mathrm{B}} = \sqrt{2} \cdot (\frac{1}{1+\sqrt{3}}) \cdot v_{\mathrm{A}} = 0{,}518 \cdot 60{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 31{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

und

$$u_{\mathrm{A}} = \sqrt{2} \cdot u_{\mathrm{B}} = 43{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

(b) Berechnung des Verlusts an mechanischen Energieformen, also hier nur kinetischer Energien beim Stoßprozess

Vor dem Stoß hat nur der Puck 'A' kinetische Energie

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{vor}}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} m {v_{\mathrm{A}}}^{2}$$

Nach dem Stoß haben beide Pucks 'A' und 'B' kinetische Energie; also

$$E_{\text{kin}}^{\text{nach}} = E_{\text{kin}}^{\text{nach}}(\text{A}) + E_{\text{kin}}^{\text{nach}}(\text{B}) = \frac{1}{2}mu_{\text{A}}^{2} + \frac{1}{2}mu_{\text{B}}^{2}$$

Daraus ergibt sich für das Verhältnis der kinetischen Energien nach und vor dem Stoß – die beiden Massen sind wieder identisch –

$$\frac{E_{\text{kin}}^{\text{nach}}}{E_{\text{kin}}^{\text{vor}}(\text{A})} = \frac{E_{\text{kin}}^{\text{nach}}(\text{A}) + E_{\text{kin}}^{\text{nach}}(\text{B})}{E_{\text{kin}}^{\text{vor}}(\text{A})} = \frac{\frac{1}{2}mu_{\text{A}}^{2} + \frac{1}{2}mu_{\text{B}}^{2}}{\frac{1}{2}mv_{\text{A}}^{2}} = \frac{u_{\text{A}}^{2} + u_{\text{B}}^{2}}{v_{\text{A}}^{2}}$$

$$= \frac{(43{,}9\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2 + (31{,}1\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2}{(60{,}0\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2} = \frac{1927 + 967}{3600} = \frac{2894}{3600} = 0{,}80$$

von der ursprünglichen kinetischen Energie des Pucks 'A' sind nach dem Stoß 80 % in kinetische Energie der beiden Pucks 'A' und 'B' umgesetzt worden; oder mit anderen Worten 20 % der anfänglich vorhandenen kinetischen Energie sind in nicht-mechanische Energieformen (Wärme, Schall, ...) umgesetzt worden.

(c) Bei einem exzentrischen, vollständig elastischen Stoß zweier Körper gleicher Masse, von denen einer vor dem Stoß in Ruhe ist, ergibt sich der Winkel zwischen den beiden Flugrichtungen nach dem Stoß notwendig als ein Rechter.

Die Forderung des Erhaltungssatzes des Impulses liefert bei gleichen Massen

$$\vec{p}(\text{A})_{\text{vor}} = \vec{p}(\text{A})_{\text{nach}} + \vec{p}(\text{B})_{\text{nach}}$$
$$m\vec{v}_{\text{A}} = m\vec{u}_{\text{A}} + m\vec{u}_{\text{B}}$$
$$\vec{v}_{\text{A}} = \vec{u}_{\text{A}} + \vec{u}_{\text{B}}$$

und die Forderung der Erhaltung der kinetischen Energien liefert bei gleichen Massen

$$\frac{1}{2}mv_{\text{A}}^{2} = \frac{1}{2}mu_{\text{A}}^{2} + \frac{1}{2}mu_{\text{B}}^{2}$$
$$v_{\text{A}}^{2} = u_{\text{A}}^{2} + u_{\text{B}}^{2}$$

Die Forderungen aus Impuls- und Energiesatz sind nur bei einem rechten Winkel der Bewegungsrichtungen der Stoßpartnern nach dem Stoß erfüllbar (PYTHAGORAS lässt grüßen!).

Der im Experiment beobachtete Winkel von $(30^{\circ} + 45^{\circ}) = 75^{\circ} < 90^{\circ}$ ist ein sicherer Hinweis darauf, dass der Stoßprozess nicht vollständig elastisch gewesen sein kann. Andererseits haften die Pucks nach dem Stoß nicht aneinander, also ist der Stoß auch nicht vollständig unelastisch. Wie die meisten Zusammenstöße ist auch der der beschriebenen Aufgabe ein teilelastischer Stoß.

Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 3

(a) Die Auslenkungen eines viskos gedämpften schwingenden Systems klingen mit einer Exponentialfunktion ab; also gilt

$$\beta = \hat{\beta}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

oder

$$\frac{\beta}{\hat{\beta}_0} = e^{-\delta \cdot t}$$

Logarithmieren dieser Beziehung liefert

$$\ln[\frac{\beta}{\hat{\beta}_0}] = \ln[e^{-\delta \cdot t}] = -\delta \cdot t$$

daraus wird für $Z = 10$ Schwingungsperioden, also für $t = 10 \cdot T_0$

$$\ln[\frac{\beta(t = 10T_0)}{\beta(t = 0)}] = -\delta \cdot 10 \cdot T_0 \qquad \text{oder} \qquad \delta = -\frac{\ln[\frac{\beta(t = 10T_0)}{\beta(t = 0)}]}{10 \cdot T_0}$$

$$\delta = -\frac{\ln[\frac{10}{50}]}{22{,}5\text{ s}} = -[\frac{\ln[\frac{1}{5}]}{22{,}5\text{ s}}] = -[\frac{\ln 1 - \ln 5}{22{,}5\text{ s}}] = -[\frac{0 - 1{,}61}{22{,}5\text{ s}}] = 0{,}0715\text{ s}^{-1}$$

(b) Der Dämpfungsgrad D ist definiert als das Verhältnis aus dem Abklingkoeffizienten δ und der Eigenkreisfrequenz ω_0

$$D = \frac{\delta}{\omega_0}$$

Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω_0

Die Schwingungsdauer für eine Schwingung ist

$$T_\mathrm{d} \approx T_0 = \frac{t}{n} = \frac{22{,}5\text{ s}}{10}$$ (‘schwache Dämpfung‘ vorausgesetzt)

daraus bestimmt sich die Eigenkreisfrequenz zu

$$\omega_0 = \frac{2\,\pi}{T_0} = 2{,}79\text{ s}^{-1}$$

Der Dämpfungsgrad wird

$$D = \frac{7{,}15 \cdot 10^{-2}\text{ s}^{-1}}{2{,}79\text{ s}^{-1}} = 2{,}56 \cdot 10^{-2}$$

Damit ist die Forderung ’schwache Dämpfung‘ ($D << 1$) erfüllt und die obige Näherung $T_\mathrm{d} \approx T_0$ erlaubt.

Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 4

(a) Für ein lineares Kraftgesetz ist nach HOOKE ist die Auslenkung proportional zur angreifenden Kraft

$F_{\text{ext}} = c\,y$ (die äußere Kraft wirkt in Richtung der Auslenkung);

damit ist im Gleichgewicht die rücktreibende Kraft der Feder $F_{\text{rück}} = -c\,y$

Eine äußere Kraft $F_{\text{ext}} = 20\ \text{N}$ bewirkte eine Auslenkung aus der Ruhelage der entspannten Feder um $y_1 = 0{,}20\ \text{m}$. Damit bestimmt sich die Federkonstante einer idealen Feder zu

$$c = \frac{20\ \text{N}}{0{,}2\ \text{m}} = 100\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Die Eigenkreisfrequenz ω_{01} bzw. die Schwingungsdauer T_{01} des Feder-Masse-Systems wird eindeutig durch die Kenngrößen des schwingungsfähigen Systems bestimmt; diese sind

- Federkonstante c der Feder und
- Masse m_1 des Gleiters 'G1'

Für Eigenkreisfrequenz ω_{01} und Schwingungsdauer T_{01} gelten die Beziehungen

$$\omega_{01}^2 = \frac{c}{m_1} = \frac{100\ \text{Nm}^{-1}}{\frac{25}{9}\ \text{kg}} = \frac{900\ \text{kg m s}^{-2}\,\text{m}^{-1}}{25\ \text{kg}} = 36{,}0\ \text{s}^{-2}$$

$$\omega_{01} = 6{,}0\ \text{s}^{-1}$$

Mit

$$\omega_{01} = 2\pi f_{01}$$

$$f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{6{,}0\ \text{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}95\ \text{s}^{-1}$$

(b) Die Schwingungen des Feder-Gleiter-Systems werden durch eine harmonische Funktion beschrieben. Da die Bewegung aus dem Umkehrpunkt der Schwingung [$y = y_{\max} = y_1$] ohne Anfangsgeschwindigkeit startet, wählt man zweckmäßigerweise zur allgemeinen Beschreibung eine Kosinus-Funktion

$$y = \hat{y} \cdot \cos(\omega_{01} t + \varphi_0)$$

denn dann wird $\hat{y} = y_1$ und vereinfachend der Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 0$.

Die Zeitabhängigkeit der Geschwindigkeit erhält man für alle Zeiten durch Ableiten

$v(t) = \dot{y}(t) = -y_1\,\omega_{01} \cdot \sin(\omega_{01} t)$ [dabei ist bereits $\varphi_0 = 0$ gesetzt].

Die Geschwindigkeit am Ort 'C' kann also über die Bestimmung des Zeitpunkts t_C, an den der Ort 'C' erreicht wird, bestimmt werden.

Dafür gilt nach dem Auslenkung,Zeit-Gesetz

$$y_C = y_2 = y_1 \cdot \cos(\omega_{01}\, t_C)$$

damit

$$\cos(\omega_{01}\, t_C) = \frac{y_2}{y_1} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot y_1}{y_1} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$(\omega_{01}\, t_C) = \frac{\pi}{6} \qquad \text{daraus} \qquad t_C = \frac{\pi}{6\cdot\omega_{01}} = \frac{\pi}{6\cdot 6{,}0\ \mathrm{s}^{-1}} = 8{,}73\cdot 10^{-2}\ \mathrm{s}$$

Den Zeitpunkt t_C braucht man aber gar nicht explizit auszurechnen; denn im Argument der Sinus-Funktion im Geschwindigkeit,Zeit-Gesetz tritt ebenfalls nur die Kombination $(\omega_{01} t_C) = \frac{\pi}{6}$ auf.

Für die Geschwindigkeit des Gleiters am Ort 'C' gilt

$$v_C = \dot{y}_C = -y_1\,\omega_{01}\cdot\sin(\omega_{01} t_C)$$

$$= -0{,}2\ \mathrm{m}\cdot 6{,}0\ \mathrm{s}^{-1}\cdot\sin(\frac{\pi}{6}) = -0{,}2\ \mathrm{m}\cdot 6{,}0\ \mathrm{s}^{-1}\cdot\frac{1}{2} = -0{,}60\ \mathrm{m\,s}^{-1}$$

Alternativer Lösungsweg:

Ein zweiter Weg zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Gleiters am Ort 'C' geht über den Energiesatz, da die Schwingungsbewegung reibungsfrei erfolgen soll. Zu jedem Zeitpunkt muss die Summe aus der potentiellen Energie der Feder und der kinetischen Energie des bewegten Gleiters gleich der Gesamtenergie des schwingungsfähigen Systems sein. Die Gesamtenergie des Systems ist aber durch die Stauchung der Feder zu Beginn des Versuchs festgelegt.

Für die potentielle Energie einer gedehnten oder gestauchten Feder gilt allgemein

$$E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}} = \frac{1}{2} c\, y^2$$

Für die kinetische Energie des bewegten Gleiters gilt

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Gleiter}} = \frac{1}{2} m_1 v^2$$

Für die Orte 'C' und 'A' liefert der Erhaltungssatz der Energie in seiner Fassung der Mechanik die Identität

$$E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{C}) + E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Gleiter}}(\mathrm{C}) = E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{A}) + E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Gleiter}}(\mathrm{A}) \qquad \text{mit}$$

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Gleiter}}(\mathrm{A}) = 0$$

Damit lässt sich die kinetische Energie des Gleiters am Ort 'C' ausdrücken als

$$E_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{Gleiter}}(\mathrm{C}) = E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{A}) - E_{pot}^{Feder}(C)$$

Mit

$$E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{A}) = \frac{1}{2} c\, {y_1}^2 = \frac{1}{2}\cdot 100\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot(0{,}20\ \mathrm{m})^2 = 2{,}00\ \mathrm{Nm}$$

und

$$E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} c\, {y_2}^2 = \frac{1}{2} c(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot y_1)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} c\, {y_1}^2 = \frac{3}{4}\cdot E_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{Feder}}(\mathrm{A}) = 1{,}50\ \mathrm{Nm}$$

wird

$$E_{\text{kin}}^{\text{Gleiter}}(\text{C}) = \frac{1}{2} m_1 v_C{}^2 = E_{\text{pot}}^{\text{Feder}}(\text{A}) - E_{\text{pot}}^{\text{Feder}}(\text{C}) = (2{,}0 - 1{,}50)\,\text{Nm} = 0{,}50\,\text{Nm}$$

$$v_\text{C}{}^2 = \frac{2 \cdot 0{,}50\,\text{Nm}}{\frac{25}{9}\,\text{kg}} = \frac{9{,}00\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot \text{m}}{25\,\text{kg}} = 0{,}36\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \qquad \text{und}$$

$$v_\text{C} = \pm 0{,}60\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(c) Die Aussage “die Gleiter koppeln beim Stoß“ bedeutet; dass sich beide Gleiter unmittelbar nach dem Stoß mit gleicher, einheitlicher Geschwindigkeit bewegen. Damit liegt – nach der Definition – ein vollständig inelastischer Stoß vor. Es gilt

- der Impulserhaltungssatz

also

$$m_1 v_\text{C} = (m_1 + m_2)\, u_\text{gem}$$

$$u_\text{gem} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \cdot v_\text{C} = \frac{m_1}{(m_1 + \frac{1}{4} m_1)} \cdot v_\text{C} = \frac{4}{5} \cdot 0{,}60\,\text{m}\,\text{s}^{-1} = 0{,}48\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

dabei ist u_gem die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Gleiter unmittelbar nach dem Stoß.

(d) Eigenkreisfrequenz, Frequenz und Schwingungsdauer ändern sich, wenn bei ungeänderter Feder(konstante) die Masse des angehängten Körpers verändert wird. Damit wird

$$\omega_{02}{}^2 = \frac{c}{(m_1 + \frac{1}{4} m_1)} = \frac{100\,\text{N}\text{m}^{-1}}{\frac{5}{4} \cdot \frac{25}{9}\,\text{kg}} = \frac{3600\,\text{kg}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\text{m}^{-1}}{125\,\text{kg}} = 28{,}8\,\text{s}^{-2} \qquad \text{und}$$

$$\omega_{02} = 5{,}4\,\text{s}^{-1}$$

damit wird

$$T_{02} = \frac{2\pi}{\omega_{02}} = \frac{2\pi}{5{,}4\,\text{s}^{-1}} = 1{,}17\,\text{s}$$

Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 5

Man berechnet aus den zehn Messwerten t_i der Durchflusszeiten den Mittelwert $\bar{t}$ und die Standardabweichung $s_{\text{n}-1}$.

Das Statistikprogramm Ihres Taschenrechners liefert dafür

- den arithmetischer Mittelwert: $\bar{t} = \frac{\sum t_\text{i}}{10} = 330{,}5_0\ \text{s}$
- die Standardabweichung: $s_{\text{n}-1}(t_\text{i}) = 2{,}252\ \text{s}$

(a) Aus der Beziehung für die dynamische Viskosität

$$\eta = K \cdot \rho \cdot \bar{t}$$

erhält man aus den Versuchsergebnissen

$$\eta = 4{,}585 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^2\,s^{-2}} \cdot 0{,}7895 \cdot 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 330{,}5\ \mathrm{s}$$
$$= 1{,}196 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Pa \cdot s} = 1{,}196\ \mathrm{mPa \cdot s}$$

Zur Erinnerung bei der Umrechnung der Einheiten: $1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N\,m^{-2}} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}}$

(b) Die Beziehung

$$\eta = K \cdot \rho \cdot \bar{t}$$

stellt ein reines **Potenzgesetz** dar. Deshalb bestimmt man bei der Fehlerrechnung zweckmäßigerweise zuerst den **relativen Größtfehler** des Ergebnisses und daraus dann den **absoluten Größtfehler**.

$$\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| = \pm\left\{\left|\frac{\Delta K}{K}\right| + \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$

Berechnung der relativen Fehler der einzelnen Messgrößen

- Apparatekonstante:

relativer Größtfehler der Apparatekonstante

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{0{,}015 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}}{4{,}585 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m^2\,s^{-2}}} = \frac{15}{4585} = 0{,}0033 = 3{,}3 \cdot 10^{-3}$$

- Dichte

relativer Größtfehler der Dichte

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{0{,}0010\ \mathrm{g\,cm^{-3}}}{0{,}7895\ \mathrm{g\,cm^{-3}}} = \frac{10}{7895} = 0{,}0013 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$$

- Durchflusszeiten

der mittlere Fehler des Mittelwerts ergibt sich aus der Standardabweichung zu

$$\Delta(\bar{t}_{\mathrm{i}}) = \frac{s}{\sqrt{10}} = \frac{2{,}252\ \mathrm{s}}{\sqrt{10}} = 0{,}712\ \mathrm{s}$$

Der relative mittlere Fehler des Mittelwerts wird damit

$$\frac{\Delta(\bar{t}_{\mathrm{i}})}{\bar{t}_{\mathrm{i}}} = \frac{0{,}712\ \mathrm{s}}{330{,}5\ \mathrm{s}} = 0{,}0022 = 2{,}2 \cdot 10^{-3}$$

Zusammengefasst wird damit der <u>relative Größtfehler</u>

$$\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| = \pm\left\{\left|\frac{\Delta K}{K}\right| + \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| + \left|\frac{\Delta\bar{t}}{\bar{t}}\right|\right\}$$
$$= \pm\{3{,}3 + 1{,}3 + 2{,}2\} \cdot 10^{-3}$$
$$= \pm 6{,}8 \cdot 10^{-3}$$
$$= 0{,}0068$$

oder nach 'oben' gerundet $\left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| = \pm 0{,}7\ \%$

der <u>absolute Größtfehler</u> der Messung wird

$$\Delta\eta = \left|\frac{\Delta\eta}{\eta}\right| \cdot \eta = \pm 7 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}196\ \text{mPa}\cdot\text{s} = 8{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{mPa}\cdot\text{s} = 0{,}0084\ \text{mPa}\cdot\text{s}$$

(c) Das Endergebnis läßt sich darstellen als

$\eta = (1{,}196 \pm 0{,}009)\ \text{mPa}\cdot\text{s}$ $\qquad\qquad$ $\eta = 1{,}196\ \text{mPa}\cdot\text{s}\ (1 \pm 0{,}7\ \%)$

Der Messwert liegt damit im Intervall

$$1{,}187\ \text{mPa}\cdot\text{s} \le \eta \le 1{,}205\ \text{mPa}\cdot\text{s}$$

Literaturwert:

Kohlrausch, F.: Praktische Physik; Band 3; 24. Auflage, 1996; Stuttgart: B.G. Teubner Verlag.

Tabelle 1.23 auf S. 320:
Dynamische Viskosität η einiger Flüssigkeiten beim Druck 1 bar

Ethylalkohol: $\eta(20\ ^\circ\text{C}) = 1{,}20\ \text{mPa}\cdot\text{s}$

Dieser Wert liegt innerhalb der Fehlergrenzen der Versuchsergebnisse.

Physik-Prüfung SS 2001 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 6

Die grafische Darstellung zeigt im angegebenen Temperaturintervall eine lineare Beziehung. Es wurde eine beste Geraden eingezeichnet.

Zur Bestimmung der Geradengleichung sind stets Punkte auszuwählen, die auf dieser Geraden liegen. Diese dürfen auch außerhalb des Messintervalls liegen!

Zwei korrespondierende Wertepaare sind zum Beispiel (für 'geschicktes' Ablesen auf der Geraden gewählt)

$\vartheta_2 = 5\ ^\circ\text{C}$ $\qquad\qquad$ $\rho_2 = 0{,}8025\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$

$\vartheta_1 = 87{,}5\ ^\circ\text{C}$ $\qquad\qquad$ $\rho_1 = 0{,}7600\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$

Nach der Zweipunkteformel erhält man für die Geradensteigung

$$m_{\text{Gerade}} = \frac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{(0{,}8025 - 0{,}7300)\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}{(5 - 87{,}5)\ \text{K}} = \frac{(-0{,}0725)\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}{82{,}5\ \text{K}}$$

$$= -8{,}79 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{g}\,\text{cm}^{-3}}{\text{K}}$$

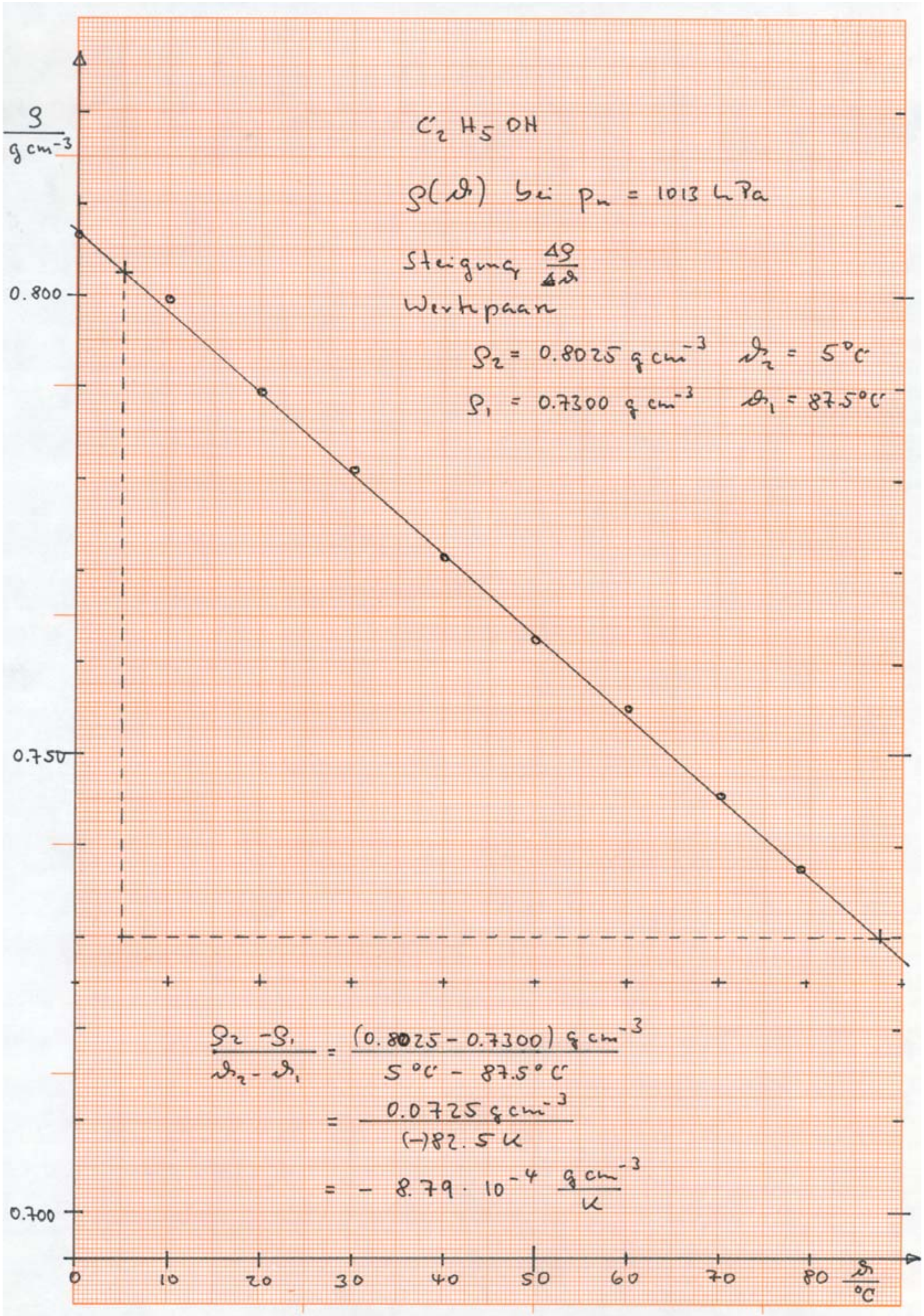
(Temperaturdifferenzen sollten in der Kelvin-Skala angegeben werden).

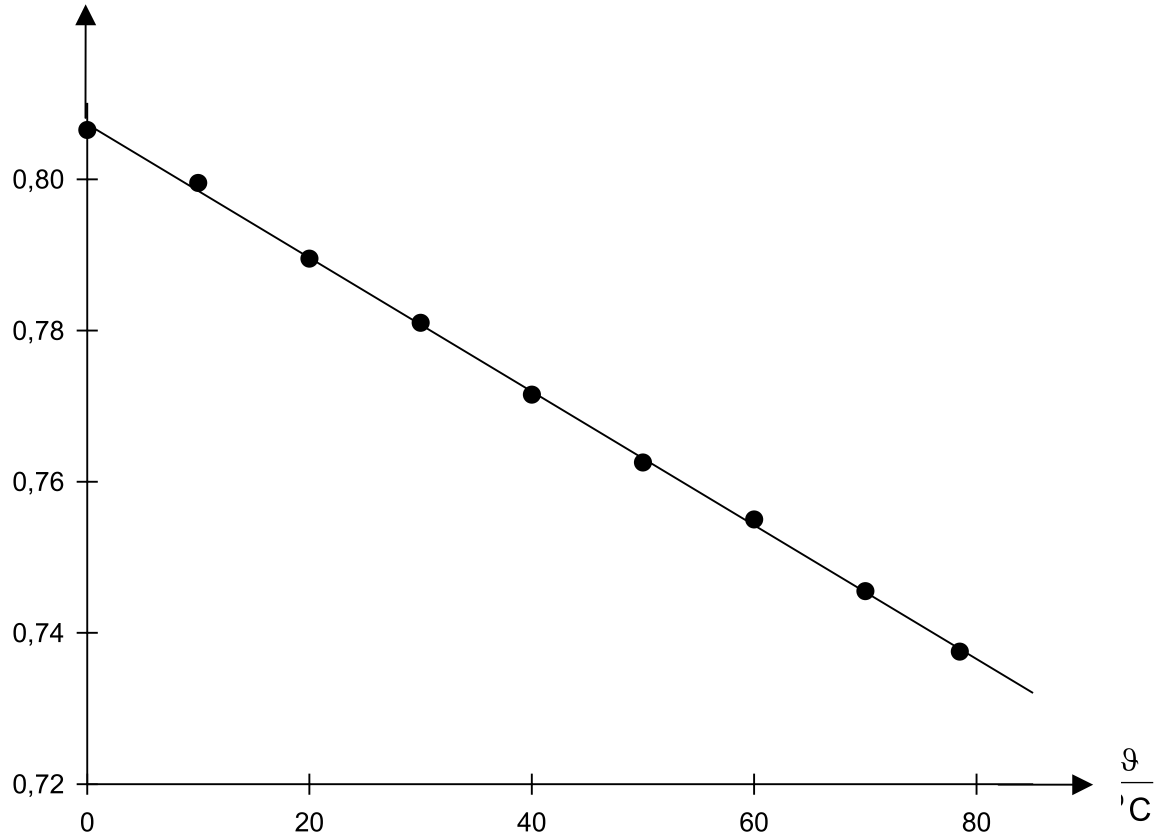
Für die Bestimmung der Geradengleichung muss die berechnete Steigung an einem Messpunkt 'festgebunden' werden. Die Geradengleichung lautet allgemein

$$\frac{\rho - \rho_1}{\vartheta - \vartheta_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{\Delta\rho}{\Delta\vartheta} = m_{\text{Gerade}}$$

$$\frac{\rho - \rho_1}{\vartheta - \vartheta_1} = \frac{\rho - 0{,}7300\ \mathrm{g\,cm^{-3}}}{\vartheta - 87{,}5\ ^{\circ}\mathrm{C}} = m_{\mathrm{Gerade}} = -8{,}79 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{g\,cm^{-3}}}{\mathrm{K}}$$

[Temperaturdifferenzen sollen in KELVIN angegeben werden.]





0,80
0,78
0,76
0,74
0,72
0
20
40
60
80
ϑ
°C