a) Bei bekannter Winkelgeschwindigkeit $\omega_E = 2\pi n = 100\pi \cdot s^{-1}$ erhält man die Beschleunigungszeit t_E durch Integration von $\alpha(t)$.

$$\int_0^{t_E} \alpha(t)dt = \int_0^{t_E} 2 \cdot tdt = \omega_E - \omega_0 = \omega_E$$

$$t_E = \sqrt{100\pi} = 17{,}7s$$

b) Da beim Kupplungsvorgang keine äußeren Momente wirken, bleibt der Drehimpuls erhalten:

$$J_1 \cdot \omega_1 = (J_1 + J_2)\omega_2 = 1{,}8 \cdot J_1 \cdot \omega_2$$

Die gekuppelten Scheiben drehen dann mit

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{1{,}8} = \frac{100\pi}{1{,}8} = 174{,}5s^{-1}$$

c) Für den Anteil p der Reibungsarbeit gilt

$$p = \frac{W_R}{E_{rot}^1} = \frac{E_{rot}^1 - E_{rot}^2}{E_{rot}^1} = 1 - \frac{J_1 \cdot 1{,}8 \cdot \omega_2^2}{J_1 \cdot \omega_1^2} = 0{,}4$$

44,4 Prozent der ursprünglichen Rotationsenergie gehen in Reibungsarbeit verloren.

(a) Das 2. NEWTONsche Axiom auf den Block angewandt liefert

$$\sum_i F_i = m\ a$$

$$-F_R - F_S + m\ g\ \sin\varphi = m\ a \quad (1).$$

Das 2. NEWTONsche Axiom für Drehbewegungen bezüglich der Scheibe lautet

$$\sum_i M_i = J_S\ \alpha$$

$$-M_B + F_S\ R = J_S \frac{a}{R} \qquad (2)$$

wobei die lineare Beschleunigung a des Blocks und die Winkelgeschwindigkeit α der Scheibe über die Gleichung a = α R verknüpft sind.

(Hinweis: Das Drehmoment (F_S R) der Seilkraft und das Bremsmoment M_B muss man mit unterschiedlichem Vorzeichen berücksichtigen).

Löst man Gl. (1) nach F_S auf und setzt das Resultat in Gl. (2) ein, so ergibt sich

$$a = \frac{m\ g\ (\sin\varphi - \mu\ \cos\varphi) - \dfrac{M_B}{R}}{m + \dfrac{J_S}{R^2}}$$

$$a = \frac{(4.5\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)\ (\sin 41.8° - (0.3)\ \cos 41.8°) - \dfrac{1.3\ \text{N m}}{0.085\ \text{m}}}{(4.5\ \text{kg}) + \dfrac{(0.016\ \text{kg m}^2)}{(0.085\ \text{m})^2}} = 0.634\ \text{m/s}^2 .$$

(b) Aus Gl. (2) folgt somit der Zahlenwert der Seilkraft zu

$$F_S = J_S \frac{a}{R^2} + \frac{M_B}{R} = \frac{(0.016\ \text{kg m}^2)(0.634\ \text{m/s}^2)}{(0.085\ \text{m})^2} + \frac{1.3\ \text{N m}}{0.085\ \text{m}} = 16.7\ \text{N}.$$

(c) Der zurückgelegte Weg des Blocks in den ersten 2 s ist

$s = ½\ a\ t^2 = ½\ (0.634\ \text{m/s}^2)\ (2\ \text{s})^2 = 1.27\ \text{m}$.

Somit beträgt die Arbeit, welche die Reibungskraft F_R verrichtet

$W_{R1} = F_R\ s = \mu\ m\ g\ \cos\varphi\ s$

$= (0.3)\ (4.5\ \text{kg})\ (9.81\ \text{m/s}^2)\ \cos 41.8°\ (1.27\ \text{m}) = 12.5\ \text{J}$.

Der Drehwinkel β in den ersten 2 s ist

$\beta = ½\ \alpha\ t^2 = ½\ (a/R)\ t^2 = ½\ [(0.634\ \text{m/s}^2)/(0.085\ \text{m})]\ (2\ \text{s})^2 = 14.9\ \text{rad}$.

Deshalb ist die vom konstanten Bremsmoment M_B geleistete Arbeit

$W_{R2} = M_B\ \beta_E = (1.3\ \text{Nm})\ (14.9\ \text{rad}) = 19.4\ \text{J}$.

Insgesamt geht also $W_{ges} = W_{R1} + W_{R2} = 31.9$ J in Form von Wärme verloren.

a) Die Eigenfrequenz eines ungedämpften Feder-Masse-Systems ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 9{,}73\ \mathrm{s}^{-1}.$$

Die Schwingungsdauer des gedämpften Systems ist

$$T_\mathrm{d} = \frac{T_0}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-D^2}}\ .$$

Daraus ergibt sich der Dämpfungsgrad

$$D = \sqrt{1-\frac{4\pi^2}{\omega_0^2 T_\mathrm{d}^2}} = 0{,}208.$$

b) Wenn die Auslenkung des Körpers beschrieben wird durch $y(t) = \hat{y}_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_\mathrm{d} t + \varphi_0)$, dann ist die Anfangsauslenkung

$$y(0) = \hat{y}_0 \cos(\varphi_0) = 8\ \mathrm{cm}\ .$$

Nach zwei Perioden ist die Auslenkung

$$y(2T_\mathrm{d}) = \hat{y}_0 \mathrm{e}^{-\delta 2T_\mathrm{d}}\cos(\omega_\mathrm{d} 2T_\mathrm{d} + \varphi_0) = \hat{y}_0 \mathrm{e}^{-\delta 2T_\mathrm{d}}\cos(\varphi_0) = y(0)\mathrm{e}^{-\delta 2T_\mathrm{d}}\ .$$

Mit $\delta = D\omega_0$ ergibt sich $y(2T_\mathrm{d}) = 8\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{e}^{-2D\omega_0 T_\mathrm{d}} = 0{,}551\,\mathrm{cm}$.

c) Die Anfangsenergie ist rein potentiell: $\mathrm{E}(0) = \frac{1}{2}\mathrm{c}\ [\mathrm{y}(0)]^2$.

Nach zwei Perioden ist die Energie $\mathrm{E}(2\mathrm{T_d}) = \frac{1}{2}\mathrm{c}\ [\mathrm{y}(2\mathrm{T_d})]^2$.

Energieverlust: $\Delta E = E(0) - E(2T_\mathrm{d})$.

Relativer Energieverlust:

$$\frac{\Delta E}{E(0)} = 1-\frac{E(2T_\mathrm{d})}{E(0)} = 1-\left(\frac{y(2T_\mathrm{d})}{y(0)}\right)^2 = 1-\mathrm{e}^{-4\delta T_\mathrm{d}} = 1-\mathrm{e}^{-4D\omega_0 T_\mathrm{d}} = 99{,}5\ \%.$$

d) Im aperiodischen Grenzfall ist $\mathrm{D} = \frac{\delta}{\omega_0} = 1$ oder $\delta = \omega_0$.

Nun ist $\delta = \frac{b}{2m}$, also $\mathrm{b} = 2\mathrm{m}\omega_0 = 18{,}5\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 18{,}5\ \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}}$.

e) Der aperiodische Grenzfall wird beschrieben durch $y(t) = (y_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t}$.

Die beiden Konstanten ergeben sich aus den Anfangsbedingungen:

$y(0) = y_1 = 8$ cm und $\dot{y}(0) = c_2 - y_1\delta = 0$.

Aus der zweiten Gleichung folgt $c_2 = y_1\delta = 77{,}9$ cm/s..

Lösung zu Aufgabe 4 **Physik-Prüfung SS01**

a) Randbedingungen: An den Einspannstellen muss die stehende Wellen Knoten besitzen. Damit ist die Länge ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge.

$L = (n+1)\frac{\lambda_n}{2}$ mit n = 0, 1, 2, 3.........

b) Die Frequenzen der stehenden Wellen sind

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{c(n+1)}{2L} = f_0(n+1).$$

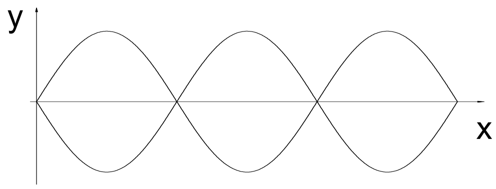
Für die beiden aufeinander folgenden Eigenfrequenzen gilt somit

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{315\,\text{Hz}}{420\,\text{Hz}}.$$

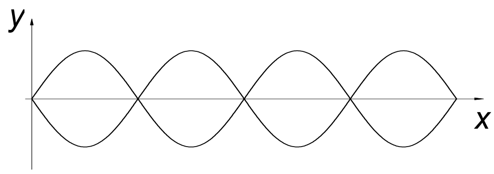
Daraus folgt n = 2.

Die Eigenschwingung bei 315 Hz ist also die zweite Oberschwingung, die bei 420 Hz die dritte.

n = 2
315 Hz



n = 3
420 Hz



x

c) Für die Phasengeschwindigkeit gilt: $c = \lambda_n f_n$, also z.B.

$$c = \lambda_2 f_2 = \frac{2L}{3} \cdot 315\,\text{Hz} = 157{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d) Die Frequenz der Grundschwingung ist

$$f_0 = \frac{c}{2L} = 105\,\text{Hz}.$$

e) Die Phasengeschwindigkeit auf Saiten ist proportional zur Wurzel aus der Spannkraft:

$c = \sqrt{\frac{F}{A\rho}}$, oder $F = c^2 A\rho = (f\lambda)^2 A\rho$.

Damit gilt $\frac{F'}{F} = \left(\frac{f'}{f}\right)^2$ oder $F' = F\left(\frac{f'}{f}\right)^2 = 41{,}9\,\text{N}$.

(a) Die kinetische Energie eines Klotzes unmittelbar nach dem Stoß geht in Form von Wärme verloren. Somit ist $E_{kin} = W_R$, bzw.

$$\frac{1}{2} m\, v^2 = F_R\, s$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeiten der beiden Klötze

$$v_1' = \sqrt{2\, \mu_G\, g\, s_1} = \sqrt{2\,(0.2)(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.1\,\mathrm{m})} = 0.626\ \mathrm{m/s}$$

und

$$v_1' = \sqrt{2\,(0.2)(9.81\,\mathrm{m/s^2})(0.56\ \mathrm{m})} = 1.48\ \mathrm{m/s}\,.$$

(b) Beim Stoss der Kugel mit dem zweiten Klotz handelt es sich um einen unelastischen Stoss (maximaler Energieverlust). Der IES liefert

$$m_K\, v_K' = (m_K + m_2)\, v_2'\,,$$

so dass

$$v_K' = \frac{(m_K + m_2)}{m_K}\, v_2' = \frac{(3.54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} + 1.78\ \mathrm{kg})}{3.54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 746\ \mathrm{m/s}$$

(c) Beim Stoss der Kugel mit dem ersten Klotz handelt es sich um einen inelastischen Stoss. Aufgrund der unterschiedlichen Endgeschwindigkeiten der beteiligten Massen liefert der IES hier

$$m_K\, v_K = m_K\, v_K' + m_1\, v_1'\,.$$

Somit ergibt sich die Anfangsgeschwindigkeit v_K der Kugel zu

$$v_K = v_K' + \frac{m_1}{m_K}\, v_1' = 746\ \mathrm{m/s} + \frac{1.22\ \mathrm{kg}}{3.54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}}\, 1.48\ \mathrm{m/s} = 963\ \mathrm{m/s}\,.$$

(d) Die Durchschnittskraft berechnet sich mit Hilfe der Gleichung $\overline{F} = \Delta p / \Delta t$ aus der Impulsänderung Δp und der Kontaktzeit Δt. Die Impulsänderung ist

$$\Delta p = m_K\, (v_K - v_K') = 3.54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\ (963\ \mathrm{m/s} - 746\ \mathrm{m/s}) = 0.768\ \mathrm{kg\ m/s}\,.$$

Die Kontaktzeit Δt kann muss abgeschätzt werden. Der Bremsweg Δx beträgt etwa 20 cm, so dass sich mit Hilfe der Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v} = (v_K + v_K')/2$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\overline{v}} = \frac{0.2\ \mathrm{m}}{854.5\ \mathrm{m/s}} = 2.34 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{s}$$

ergibt. Daraus folgt dann die Durchschnittskraft zu $\overline{F} = \Delta p / \Delta t = 3.28\ \mathrm{kN}$. Die Reibungskraft berechnet man aus $F_R = \mu_G\, N = (0.2)(1.22\ \mathrm{kg})(9.81\ \mathrm{m/s^2}) = 2.4\ \mathrm{N}$, also $F_R << \overline{F}$ (Annahme II ist also gerechtfertigt).

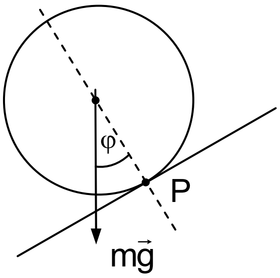
(a) Die Schwingungsdauer T_0 eines physikalischen Pendels berechnet sich aus

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{m\,g\,h}}\,.$$

wobei der Abstand Drehachse-Schwerpunkt h = L und $J_A = J_S + m\,L^2$. Somit ist

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\tfrac{2}{5}\,m\,r^2 + m\,L^2}{m\,g\,L}} = 2\pi \sqrt{\frac{\tfrac{2}{5}\,(0.05\text{ m})^2 + (0.15\text{ m})^2}{(9.81\text{ m/s}^2)(0.15\text{ m})}} = 0.794\text{ s}\,.$$

(b1) Die Schwingungsdauer T_0 nimmt zu, da ein grösserer Anteil der potentiellen Energie beim Abrollen in kinetische Rotationsenergie umgewandelt wird. Dadurch ist die Translationsgeschwindigkeit des Schwerpunkts relativ zu Teilaufgabe a) kleiner.



(b2) Mit der Definitionsgleichung $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ergibt sich das Drehmoment der Gewichtskraft bezüglich des Punktes P zu

$$M = m\,g\,r\,\sin\varphi \qquad \text{(s. Skizze).}$$

(b3) Das 2. NEWTONsche Axiom für die momentane Drehung der Kugel um P lautet

$$\sum_i M_i = J_P\,\alpha$$

$$m\,g\,r\,\sin\varphi = J_P\,\ddot{\beta}$$

Mit der Näherung für kleine Auslenkwinkel $\sin\varphi \approx \varphi$, dem Massenträgheitsmoment $J_P = 2/5\;m\,r^2 + m\,r^2 = 7/5\;m\,r^2$ und dem Zusammenhang $\beta = -\,[(R - r)/r]\,\varphi$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$m\,g\,r\,\varphi = \left(\frac{7}{5}\,m\,r^2\right)\left(-\frac{R-r}{r}\right)\ddot{\varphi}$$

bzw.

$$\ddot{\varphi} + \frac{5\,g}{7\,(R-r)}\,\varphi = 0\,.$$

(b4) Die Kreisfrequenz ω dieser harmonischen, ungedämpften Schwingung ist somit

$$\omega = \sqrt{\frac{5\,g}{7\,(R-r)}}$$

und die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{7\,(R-r)}{5\,g}} = 2\pi \sqrt{\frac{7\,(0.2\text{ m} - 0.05\text{ m})}{5\,(9.81\text{ m/s}^2)}} = 0.919\text{ s}\,.$$

(a) Mit den statistischen Funktion eines Taschenrechners ergibt sich

t_1 / s	t_2 / s
0.055	0.027
0.060	0.031
0.054	0.035
0.053	0.029
0.054	0.031
0.049	0.035
$\bar{t}_1 = 0.05417$ s	$\bar{t}_2 = 0.03133$ s
s = 0.003545 s	s = 0.003204 s
$\Delta\bar{t}_1 = 0.00145$ s	$\Delta\bar{t}_2 = 0.00131$ s

<u>Endergebnis:</u>
$\bar{t}_1 = (0.0542 \pm 0.0015)$ s
$\bar{t}_2 = (0.0313 \pm 0.0013)$ s

(b) Die Beschleunigung ergibt sich dann aus

$$a = \frac{L^2}{2\,s}\left(\frac{1}{t_2^{\,2}} - \frac{1}{t_1^{\,2}}\right) = \frac{(0.05\ \text{m})^2}{2\ (1\ \text{m})}\left(\frac{1}{(0.0542\ \text{s})^2} - \frac{1}{(0.0313\ \text{s})^2}\right) = 0.8504\ \text{m/s}^2$$

(c) Fehler und Zahlenwert der Grösse $f = \left(\frac{1}{t_2^{\,2}} - \frac{1}{t_1^{\,2}}\right)$ ergeben sich aus

$$f = \left(\frac{1}{t_2^{\,2}} - \frac{1}{t_1^{\,2}}\right) = \left(\frac{1}{(0.0313\ \text{s})^2} - \frac{1}{(0.0542\ \text{s})^2}\right) = 680\ 1/\text{s}^2,$$

bzw.

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}\Delta t_1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2\ \Delta t_1}{t_1^{\,3}}\right)^2 + \left(-\frac{2\ \Delta t_2}{t_2^{\,3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\ (0.0015\ \text{s})}{(0.0542\ \text{s})^3}\right)^2 + \left(-\frac{2\ (0.0013\ \text{s})}{(0.0313\ \text{s})^3}\right)^2} = 86.9\ \text{s}^{-2}.$$

Somit ist der relative Fehler der berechneten Grösse a

$$\frac{\Delta a}{a} = \sqrt{2\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta s}{s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0.05\ \text{cm}}{5\ \text{cm}}\right)^2 + \left(\frac{0.2\ \text{cm}}{100\ \text{cm}}\right)^2 + \left(\frac{86.9\ 1/\text{s}^2}{680\ 1/\text{s}^2}\right)^2}$$

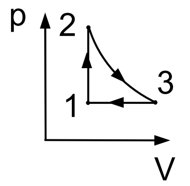
$$= \sqrt{0.0002 + 4\cdot 10^{-6} + 0.0163} = 0.128 = 12.8\%.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Hauptfehler aufgrund der Zeitmessung zustande kommt. Der absolute Fehler ist dann

$$\Delta a = (0.128)\ a = (0.128)\ (0.8504\ \text{m/s}^2) = 0.1089\ \text{m/s}^2.$$

<u>Endergebnis:</u> $a = (0.85 \pm 0.11)\ \text{m/s}^2$

(a)



$1 \to 2$	Isochore ZÄ
$2 \to 3$	Adiabate ZÄ
$3 \to 1$	Isobare ZÄ

(b) Um die zugeführte Wärme Q_{12} zu berechnen, muss man zunächst die Stoffmenge n bestimmen. Aus der idealen Gasgleichung p V = n R T folgt

$$n = \frac{p\ V}{R\ T} = \frac{(10^5\ \text{Pa})(4.87 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3)}{[8.31\ \text{J}/(\text{mol K})]\ (293\ \text{K})} = 0.2\ \text{mol}\,.$$

Die molare Wärmekapazität eines idealen Gases ist c_{mv} = f/2 R, wobei die Anzahl der Freiheitsgrade f = 3 ist (einatomiges Gas). Somit ergibt sich

$$Q_{12} = n\ c_{mv}\ (T_2 - T_1) = (0.2\ \text{mol})\ \frac{3}{2}\ [8.31\ \text{J}/(\text{mol K})](600\ \text{K} - 293\ \text{K}) = 765\ \text{J}$$

Der maximale Druck p_2 nach der isochoren Erwärmung von 1 nach 2 ist dann

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{600}{293}\ (1\ \text{bar}) = 2.05\ \text{bar}\,.$$

(c) Das Volumen V_3 nach der adiabaten Expansion lässt sich mit Hilfe der Adiabatengleichung p V^κ = konst. berechnen, wobei der Isentropenexponent κ = 1 + 2/f = 5/3 ist.

$$V_3 = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/\kappa}\ V_2 = (2.05)^{3/5}\ (4.87\ \text{L}) = 7.49\ \text{L}$$

(d) Die Nutzarbeit W kann jetzt z.B. über die Gleichung $|W| = |Q_{12}| - |Q_{31}|$ berechnet werden. Mit $T_3 = \frac{V_3}{V_1} T_1 = \frac{7.49}{4.87}\ (293\ \text{K}) = 451\ \text{K}$ (Isobare ZÄ) folgt

$$Q_{31} = n\ c_{mp}\ (T_1 - T_3) = (0.2\ \text{mol})\ \frac{5}{2}\ [8.31\ \text{J}/(\text{mol K})](-158\ \text{K}) = -655\ \text{J}\,.$$

Somit ist der thermodynamische Wirkungsgrad η dieses Kreisprozesses

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{zu}|} = \frac{|Q_{12}| - |Q_{31}|}{|Q_{12}|} = \frac{(765\ \text{J} - 655\ \text{J})}{(765\ \text{J})} = 0.144 = 14.4\%\,.$$

Bem.: Die Nutzarbeit kann auch direkt aus dem p,V-Diagramm als Differenz der Flächen berechnet werden, also $|W| = |W_{23}| - |W_{31}|$ = 372 J – 262 J = 110 J.

(e) Vergleicht man den in Teilaufgabe d) berechneten Wirkungsgrad mit dem des Carnotschen Kreisprozesses

$\eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{293\ \text{K}}{600\ \text{K}} = 0.512 = 51.2\%$, so stellt man fest, dass es sich eher um eine schlechte Wärmekraftmaschine handelt.