(a) Das 2. NEWTONsche Axiom F = m a liefert sofort die Beschleunigungsfunktion

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m}(1 - \frac{t}{T}) \, .$$

Mit m = 0.5 kg und F_0 = 10 N erhält man somit

$$a(0) = \frac{10\ \mathrm{N}}{0.5\ \mathrm{kg}} = 20\ \mathrm{m/s^2} \qquad \text{und} \qquad a(t{=}T) = 0 \, .$$

(b) Um die Funktion v(t) zu erhalten, muss man a(t) integrieren, denn $a(t) = \dot{v}(t)$.
Mit konkreten Integrationsgrenzen ergibt sich

$$\int_0^t dv = \int_0^t a(t')\, dt'$$

$$v(t) - v(0) = \frac{F_0}{m}\int_0^t (1 - \frac{t'}{T})\, dt' = \frac{F_0}{m}[\int_0^t dt' - \frac{1}{T}\int_0^t t'\, dt']$$

$$v(t) = v_0 + \frac{F_0}{m}[t - \frac{t^2}{2\,T}] \, .$$

Wird die Zeit t in Sekunden eingesetzt so ergibt sich für die angegebenen Zahlenwerte

$$v(t) = 5\ \mathrm{m/s} + (20\ \mathrm{m/s})\ t - (2\ \mathrm{m/s})\ t^2$$

und daraus

$$v(t{=}5) = 55\ \mathrm{m/s} \, .$$

(c) Über die Definition des Kraftstosses $\Delta p = \int F(t)\, dt$ lässt sich die Impulsänderung Δp über die Fläche unter der Kurve des entsprechenden Zeitintervalls, also hier die Dreiecksfläche, berechnen.

$$\Delta p = \frac{1}{2} F_0\ T = \frac{1}{2}(10\ \mathrm{N})(5\ \mathrm{s}) = 25\ \mathrm{N\ s}.$$

Daraus folgt mit $\Delta p = m\,\Delta v$ die Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta v = \frac{25\ \mathrm{N\ s}}{0.5\ \mathrm{kg}} = 50\ \mathrm{m/s} \, .$$

Mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 5 m/s ergibt sich somit die gleiche Endgeschwindigkeit wie in Aufgabenteil (c).

$$v(t{=}5\ \mathrm{s}) = v_0 + \Delta v = 55\ \mathrm{m/s} \, .$$

(a1) Die Punktmasse hat bezüglich des Drehpunkts A das Massenträgheitsmoment

$$J_A = m_Z\, L^2 = (0.12\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 = 0.03\text{ kg m}^2.$$

(a2) Für einen ausgedehnten Körper ergibt sich nach STEINER $J_A = J_S + m_Z\, L^2$, wobei

$$J_S = \frac{1}{4} m_Z\, r_Z{}^2 + \frac{1}{12} m_Z\, l_Z{}^2 = \frac{1}{4}(0.12\text{ kg})(1.5\text{ cm})^2 + \frac{1}{12}(0.12\text{ kg})(0.03\text{ m})^2$$
$$= 1.58 \cdot 10^{-5}\text{ kg m}^2.$$

Somit erhält man für

$$J_A = 1.58 \cdot 10^{-5}\text{ kg m}^2 + 0.03\text{ kg m}^2 = 3.002 \cdot 10^{-2}\text{ kg m}^2.$$

(a3) Die prozentuale Abweichung ist dann

$$\frac{\Delta J}{J_A} = \frac{1.58 \cdot 10^{-5}\text{ kg m}^2}{3.002 \cdot 10^{-2}\text{ kg m}^2} = 5.3 \cdot 10^{-4} = 0.053\ \%$$

und deshalb praktisch vernachlässigbar.

(b) Nach dem Eindringen der Kugel ist $J_{ges} = J_{St} + J_Z + J_K$, also

$$J_{ges} = \frac{1}{3} m_{St}\, L^2 + m_Z\, L^2 + m_K\, L^2$$
$$= \frac{1}{3}(0.05\text{ kg})(0.5\text{ m})^2 + 0.03\text{ kg m}^2 + (0.5 \cdot 10^{-3}\text{ kg})(0.5\text{ m})^2$$
$$= (0.417\text{ kg m}^2 + 3.00 + 0.0125) \cdot 10^{-2}\text{ kg m}^2 = 3.43 \cdot 10^{-2}\text{ kg m}^2.$$

(c) Entscheidend für die Gültigkeit des Impuls- bzw. Drehimpulserhaltungssatzes ist die Summe aller <u>äusseren</u> Kräfte, bzw. die Summe aller <u>äusseren</u> Drehmomente. Da normalerweise während des Stosses eine Lagerkraft F_L auftritt, ist $\sum \vec{F}_{i,\,ext} \neq 0$ und somit gilt der Impulserhaltungssatz nicht. Der Drehimpulserhaltungssatz bezüglich des Drehpunkts A darf angewandt werden, da die Summe $\sum \vec{M}_{i,\,ext} = 0$ ist.

(d) Der Drehimpulserhaltungssatz liefert

$$L_{vorher} = L_{nachher}$$
$$L\, m_K\, v_K = J_{ges}\, \omega$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω unmittelbar nach dem Stoss lässt sich aus dem Energieerhaltungssatz $E_{kin} = E_{pot}$ berechnen. Die kinetische Energie bezieht sich dann auf den Nulldurchgang und potentielle Energie auf den Umkehrpunkt. Da die Schwerpunkte von Stab, Zylinder und Kugel unterschiedliche Höhenänderungen erfahren ergibt sich

$$E_{pot} = m_{St}\, g\, \frac{L}{2}(1 - \cos\varphi) + (m_Z + m_K)\, g\, L\, (1 - \cos\varphi)$$

während

$$E_{kin} = \frac{1}{2} J_{ges} \, \omega^2 .$$

Der EES liefert dann die Gleichung

$$\frac{1}{2} J_{ges} \, \omega^2 = [\frac{m_{St}}{2} + m_Z + m_K] \, g \, L \, (1 - \cos \varphi)$$

bzw.

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{J_{ges}} [\frac{m_{St}}{2} + m_Z + m_K] \, g \, L \, (1 - \cos \varphi)}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \, [\frac{0.05 \text{ kg}}{2} + 0.12 \text{ kg} + 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg}](9.81 \, \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0.5 \text{ m})(1 - \cos 5°)}{3.43 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2}}$$

$$= 0.398 \text{ rad/s}.$$

In den Drehimpulserhaltungssatz eingesetzt erhält man dann

$$v_K = \frac{J_{ges} \, \omega}{L \, m_K} = \frac{(3.43 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^2)(0.398 \text{ rad/s})}{(0.5 \text{ m})(0.5 \cdot 10^{-3} \text{ kg})} = 54.6 \text{ m/s} .$$

(a) Der Exzenterradius R berechnet sich aus der Amplitude der harmonischen Schwingung

$$x(t) = R \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Mit der Drehzahl n = 300 min^{-1} = 5 s^{-1} ergibt sich die Kreisfrequenz

$$\omega = 2\,\pi \cdot \frac{300}{60}\,s^{-1} = 10 \cdot \pi \cdot s^{-1}.$$

Die Kolbengeschwindigkeit v und die Beschleunigung a ist dann

$$\dot{x}(t) = -\,\omega \cdot R \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\ddot{x}(t) = -\,\omega^2 \cdot R \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

In den Umkehrpunkten ist $\ddot{x}$ maximal, also

$$|a_{max}| = \omega^2 \cdot R.$$

Somit ist

$$R = \frac{|a_{max}|}{\omega^2} = \frac{50\ m \cdot s^{-2}}{(10 \cdot \pi \cdot s^{-1})^2} = 5{,}07\ cm.$$

(b) Die Maximalgeschwindigkeit ist.

$$|v_{max}| = \omega \cdot R = 10 \cdot \pi \cdot s^{-1} \cdot 0{,}051\ m = 1{,}59\ m \cdot s^{-1}.$$

(c) Bei doppelter Drehzahl $n_{neu} = 2\ n_{alt} = 10\ s^{-1}$ erhält man

$$|v_{neu}| = 2\,|v_{alt}| = 3{,}18\ m \cdot s^{-1}$$

$$|a_{neu}| = 4\,|a_{alt}| = 200\ m \cdot s^{-2}.$$

(d) Für die ideale Schraubenfeder gilt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 10 \cdot \pi \cdot s^{-1}.$$

Mit $\omega_0 = \omega$ folgt

$$c = m \cdot \omega^2 = 1\,kg \cdot 100 \cdot \pi^2 \cdot s^{-2} = 987\ N \cdot m^{-1}.$$

.

(a) Für Drehschwingungen gilt das 2. Newtonsche Axiom

$$\sum_i M_i = J_D \, \alpha$$

M_i: i-tes rücktreibendes Drehmoment

J_D : Massenträgheitsmoment des Stabes bezüglich des Drehpunktes D

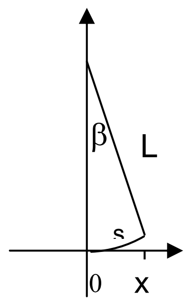
$\alpha = \ddot{\beta}$: Winkelbeschleunigung des Stabes

Insgesamt gibt es drei rücktreibende Drehmomente. Das Moment, das durch die Federkraft einer Feder auf das Stabende ausgeübt wird, hat bei einer Längenänderung der Feder um die Strecke x und einem Richtwert c die Grösse

$$M_{Feder} = -F_{Feder} \, L = -c \, x \, L \, .$$

Da für eine ideale Feder Stauchung und Dehnung äquivalent sind, addieren sich die von den beiden Federn ausgeübten Drehmomente zu

$$M_{Federn} = -2\,c\; x\,L.$$



Für ein Kreissegment gilt $\beta = s/L$ und für kleine Winkel β ist die Bogenlänge ungefähr gleich der Federdehnung x (s. Skizze). Somit ist $x = \beta L$.

Das von beiden Federn ausgeübte rücktreibende Drehmoment hat dann den Wert

$$M_{Federn} = -2\,(c\,\beta L)\,L = -2\,c\,\beta L^{2}.$$

Das rücktreibende Drehmoment, das durch die Gewichtskraft ausgeübt wird und im Schwerpunkt des Stabes im Abstand L/2 vom Drehpunkt angreift, lautet

$$M_{Gewichtskraft} = -m\,g\,\frac{L}{2}\sin\beta \approx -m\,g\,\frac{L}{2}\beta \qquad \text{(kleine Winkel).}$$

Das gesamte rücktreibende Drehmoment wird somit

$$\sum_i M_i = M_{Gewichtskraft} + M_{Federn} = -m\,g\,\frac{L}{2}\beta - 2\,c\,L^2\beta \, .$$

Aus dem 2. Newtonschen Axiom erhält man damit die Gleichung

$$J_D\ddot{\beta} = -\left(m\,g\,\frac{L}{2} + 2\,c\,L^2\right)\beta$$

Nach Umstellen und Division durch J_α ergibt das die Differentialgleichung einer harmonischen, ungedämpften Drehschwingung

$$\ddot{\beta} + \frac{m\,g\,\frac{L}{2} + 2\,c\,L^2}{J_D}\beta = 0 \, .$$

(b) Aus dem Vergleich mit $\ddot{\beta} + \omega_0^2\,\beta = 0$ kann man die Kreisfrequenz ω_0 ablesen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m\,g\,\frac{L}{2} + 2\,c\,L^2}{J_D}}\ .$$

Da $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ ist, erhält man als freie Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_D}{m\,g\,\frac{L}{2} + 2\,c\,L^2}}\ .$$

Das Massenträgheitsmoment des Stabes unter Berücksichtigung des Steinerschen-Anteiles bezüglich D lautet

$$J_D = J_S + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 \text{ bzw. } J_D = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2\ .$$

Damit wird $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{1}{3}\,m\,L^2}{m\,g\,\frac{L}{2} + 2\,c\,L^2}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{2\,L\,m}{3\,g\,m + 12\,c\,L}}$.

Mit den angegebenen Werten erhält man

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2\cdot 0.4\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{kg}}{3\cdot 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 2\,\mathrm{kg} + 12\cdot 200\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\cdot 0.4\,\mathrm{m}}} = 0.25\ \mathrm{s}.$$

Die Zustandsgrößen für den Anfangszustand 'A' und den Endzustand 'E' des Aufwärmvorgangs sind.

$p_A = p_{auß} = 1.0\,\text{bar}$ $\qquad$ $p_E = p_{auß} = 1.0\,\text{bar}$

$V_A = 0.95 \cdot V_{prall} = 0.95 \cdot 2000\,m^3$ $\qquad$ $V_E = V_{prall} = 2000\,m^3$

$T_A = 280.2\,K$

(a) Der Aufwärmvorgang soll ohne Druckänderung, also 'isobar' erfolgen. Die Zustandsgleichung idealer Gase

$$pV = nR_mT$$

liefert für eine isobare Zustandsänderung

$$\frac{V}{T} = \text{const}$$

Die Temperatur im Zustand 'E' ergibt sich damit aus der Forderung $\frac{V_E}{T_E} = \frac{V_A}{T_A}$

$$T_E = \frac{V_E}{V_A} \cdot T_A = \frac{V_{prall}}{0.95 \cdot V_{prall}} \cdot T_A = \frac{1}{0.95} \cdot 280.2\,K = 294.9\,K$$

Die Endtemperatur auf der Celsius-Skala ist $\vartheta_E = (294.9 - 273.2)\ {}^0C = 21.7\ {}^0C$.

Zwischenüberlegung

Die Teilaufgaben (b), (c) und (d) sind nicht unabhängig voneinander. Die Änderung der inneren Energie ΔU, die umgesetzte Wärme Q_{AE} und die umgesetzte Arbeit W_{AE} sind über den 1. Hauptsatz miteinander verkoppelt.

$$\Delta U = U_E - U_A = Q_{AE} + W_{AE}$$

Hat man zwei der physikalischen Größen unabhängig voneinander bestimmt, dann erhält man die Dritte aus dem 1. Hauptsatz. Zur Probe kann natürlich dann die dritte Größe ebenfalls unabhängig bestimmt werden.

Bestimmung der Teilchenmenge n

Auf jeden Fall braucht man die Teilchenmenge n der eingeschlossenen Luft, deren Moleküle als zweiatomig behandelt werden.

Die Teilchenmenge n ergibt sich aus der Zustandsgleichung idealer Gase für den Anfangszustand 'A'

$$p_AV_A = nR_mT_A$$

$$n = \frac{p_AV_A}{R_mT_A} = \frac{1.0 \cdot 10^5\ Nm^{-2} \cdot 0.95 \cdot 2.0 \cdot 10^3\ m^3}{8.31\,Nm\,mol^{-1}K^{-1} \cdot 280.2\ K} = 8.16 \cdot 10^4\ mol$$

(b) Für die umgesetzte Wärme gilt für eine isobare Zustandsänderung

$$Q_{AE} = nC_{mp}(T_E - T_A)$$

Die molare isobare Wärmekapazität C_{mp} bestimmt sich aus der Anzahl f_{ges} der Freiheitsgrade zu

$$C_{mp} = \frac{(f_{ges} + 2)}{2} R_m$$

Für ein ideales zweiatomiges Gas (Model 'starre Hantel) ist die Anzahl der Freiheitsgrade

$$f_{ges} = f_{trans} + f_{rot} = 3 + 2 = 5$$

$$Q_{AE} = nC_{mp}(T_E - T_A) = n \cdot \frac{7}{2} R_m \cdot (T_E - T_A)$$

$$= 8.16 \cdot 10^4 \text{ mol} \cdot \frac{7}{2} \cdot 8.31 \, \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (294.9 - 280.2)\,\text{K}$$

$$= 34.9 \cdot 10^6 \text{ J}$$

(c) Die Volumenänderungsarbeit für jeden Prozess $'A' \rightarrow 'E'$ ist gegeben durch die Defintion

$$W_{AE} = -\int_{V_A}^{V_E} p(V)dV$$

Für einen isobaren Prozess ist $p(V) = p_{auß} = \text{const}$; also wird

$$W_{AE} = -p_{äuß} \int_{V_1}^{V_3} dV = -p_{äuß} \cdot (V_E - V_A)$$

$$= -1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2} \cdot (1.0 - 0.95) \cdot 2.0 \cdot 10^3 m^3 = -10 \cdot 10^6 \text{ J}$$

(d) Die innere Energie U eines idealen Gases hängt nur von der absoluten Temperatur ab. Für die Änderung ΔU der inneren Energie gilt

$$\Delta U = U_E - U_A = nC_{mv}(T_E - T_A)$$

Die molare isochore Wärmekapazität C_{mv} bestimmt sich aus der Anzahl f_{ges} der Freiheitsgrade zu

$$C_{mv} = \frac{f_{ges}}{2} R_m.$$

Also wird

$$\Delta U = U_E - U_A = nC_{mv}(T_E - T_A) = n \cdot \frac{5}{2} R_m \cdot (T_E - T_A)$$

$$= 8.16 \cdot 10^4 \text{mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8.31 \, \text{Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (294.9 - 280.2)\,\text{K}$$

$$= 24.9 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Probe: Verkopplung der Ergebnisse der Teilaufgaben (a), (b) und (c)

Die Änderung der inneren Energie ΔU, die umgesetzte Wärme Q_{AE} und die umgesetzte Arbeit W_{AE} sind über den 1. Hauptsatz miteinander verkoppelt, gemäß

$$\Delta U = Q_{AE} + W_{AE}$$

Ergebnis der Teilaufgabe (b) $\quad Q_{AE} = 34.9 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$

Ergebnis der Teilaufgabe (c) $\quad W_{AE} = -10 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$

Ergebnis der Teilaufgabe (d) $\quad \Delta U = 24.9 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$