Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 1

Eine konstante Steiggeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{steig}}$ der Kugel fordert für die Beschleunigung $\vec{a}_{\text{steig}} = 0$. Nach NEWTON muss damit auch die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}} = \vec{0}$ werden.

Das Problem ist eindimensional; die Umlenkrollen lenken die auf den Körper der Masse M ausgeübte Gravitationskraft nach 'unten' in eine nach 'oben' wirkende Kraft auf die Aluminiumkugel um. Damit wird auch ein eindimensionales Koordinatensystem festgelegt. [Anmerkung: vernachlässigt wird der Einfluss der Umlenkrollen auf die Bewegung.]

- Kräfte nach 'oben' auf die Kugel sind
  - Gewichtskraft auf den Körper der Masse M $\quad F_{\text{G}}^{\text{M}} = M\,g$
  - Auftriebskraft auf die Kugel $\quad F_{\text{A}}^{\text{m}} = (\frac{4}{3}\pi R_{\text{K}}{}^{3})\rho_{\text{Öl}}\,g$

Die Auftriebskraft auf den Körper der Masse M wird vernachlässigt. Begründung: für die umgebende Luft ist die Dichte etwa $\rho_{\text{Luft}} = 1{,}30\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$; für ein Metall, z.B. Kupfer, ist die Dichte $\rho_{\text{Cu}} = 8{,}95\cdot 10^{3}\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$.

- Kräfte nach 'unten' auf die Kugel sind
  - Gewichtskraft auf den Körper der Masse m_{K} $\quad F_{\text{G}}^{\text{m}} = (\frac{4}{3}\pi R_{\text{K}}{}^{3})\rho_{\text{Al}}\,g$
  - STOKESsche Reibungskraft auf die Kugel $\quad F_{\text{R}}^{\text{m}} = 6\,\pi\,R_{K}\,\rho_{\text{Öl}}\,v_{\text{steig}}$

Weil keine Wirbel auftreten ist die Strömung laminar und es gilt das STOKESsche Reibungsgesetz mit einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung. Bei einer Bewegung der Kugel nach 'oben' ist die Reibungskraft der Bewegungsrichtung entgegengerichtet, also nach 'unten'.

Die resultierende Kraft auf die Kugel wird Null, wenn gilt

$$F_{\text{G}}^{\text{M}} + F_{\text{A}}^{\text{m}} = F_{\text{G}}^{\text{m}} + F_{\text{R}}^{\text{m}}$$

Daraus

$$F_{\text{G}}^{\text{M}} = Mg = F_{\text{G}}^{\text{m}} + F_{\text{R}}^{\text{m}} - F_{\text{A}}^{\text{m}}$$

schließlich

$$M = \frac{F_{\text{G}}^{\text{m}} + F_{\text{R}}^{\text{m}} - F_{\text{A}}^{\text{m}}}{g}$$

Berechnung der einzelnen Terme des Zählers dieser Beziehung

$$F_{\text{G}}^{\text{m}} = (\frac{4}{3}\pi R_{\text{K}}{}^{3})\rho_{\text{Al}}\,g = \frac{4}{3}\pi\cdot 1{,}00^{3}\ \text{cm}^{3}\cdot 2{,}70\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}\cdot 981\,\text{cm}\,\text{s}^{-2} = 11095\ \text{g}\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$$

$$= 11095\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 10^{-2}\ \text{m}\,\text{s}^{-2} = 11{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

$$F_{\text{A}}^{\text{m}} = (\frac{4}{3}\pi R_{\text{K}}{}^{3})\rho_{\text{Öl}}\,g = \frac{4}{3}\pi\cdot 1{,}00^{3}\ \text{cm}^{3}\cdot 0{,}90\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}\cdot 981\,\text{cm}\,\text{s}^{-2} = 3698\ \text{g}\,\text{cm}\,\text{s}^{-2}$$

$$= 3698\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 10^{-2}\ \text{m}\,\text{s}^{-2} = 37{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

$$F_{\text{R}}^{\text{m}} = 6\,\pi\,R_{K}\,\eta_{\text{Öl}}\,v_{\text{steig}} = 6\pi\cdot 1\cdot 10^{-2}\ \text{m}\cdot 1{,}2\,\frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}^{2}}\cdot 1\cdot 10^{-1}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 22{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

Einsetzen dieser Werte liefert für die Masse M des anzuhängenden Körpers

$$M = \frac{F_G^m + F_R^m - F_A^m}{g} = \frac{(111{,}0 + 22{,}6 - 37{,}0)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}{9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}} = 9{,}85\ \mathrm{g}$$

Kontrolle der Bedingung 'laminare Strömung': die REYNOLDSsche Re Zahl muss kleiner sein als die kritische REYNOLDS-Zahl $\mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$

$$\mathrm{Re} = \frac{R_K v_{\mathrm{steig}} \rho_{\mathrm{Öl}}}{\eta_{\mathrm{Öl}}} = \frac{1\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\cdot 10^{-1}\ \mathrm{m\,s^{-1}}\, 0{,}9\cdot 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}}{1{,}2\,\mathrm{N\,m^{-2}\,s}} = 0{,}75 \ll \mathrm{Re}_{\mathrm{krit}}$$

Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 2

Bei der inneren Kopplung wirken nur innere Momente, deshalb bleibt der Gesamt-Drehimpuls $\vec{L}_{\mathrm{ges}}$ des rotierenden Systems – bestehend aus den beiden Scheiben '1' und '2' - bei diesem Kopplungsvorgang ungeändert. Als Vektorgröße gilt dies für Betrag und Richtung des Gesamtdrehimpulses.

$$\vec{L}_{\mathrm{nach}} = \vec{L}_{\mathrm{vor}} = \vec{L}_{\mathrm{ges}}$$

Die Wahl des Drehsinns 'positiv' bzw. 'negativ' ist willkürlich; sie muss aber für die Berechnungen beibehalten werden.

Vor der Kopplung der beiden Scheiben gilt

$$\vec{L}_{\mathrm{vor}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = J_1\vec{\omega}_1 + J_2\vec{\omega}_2$$

Drehimpuls Scheibe '1': $\vec{L}_1 = J_1\vec{\omega}_1$ Betrag $|\vec{L}_1| = J_1|\vec{\omega}_1|$

Drehimpuls Scheibe '2': $\vec{L}_2 = J_2\vec{\omega}_2$ Betrag $|\vec{L}_2| = J_2|\vec{\omega}_2| = (3J_1)\cdot\frac{1}{2}|\vec{\omega}_1| = \frac{3}{2}J_1|\vec{\omega}_1|$

Weil $|\vec{L}_2| > |\vec{L}_1|$ wählt man zweckmäßigerweise die Drehrichtung von $\vec{L}_2$ 'positiv'; die Drehrichtung nach dem Kopplungsvorgang muss dann wegen $|\vec{L}_2| > |\vec{L}_1|$ notwendig in diese 'positive' Drehrichtung zeigen.

Nach der Kopplung gilt

Drehimpuls $\vec{L}_{\mathrm{nach}} = (J_1 + J_2)\vec{\omega}_E$ Betrag $|\vec{L}_{\mathrm{nach}}| = (J_1 + 3J_1)|\vec{\omega}_E|$

Nach der Überlegung zur Drehrichtung nach dem Koppeln – in Drehrichtung vom Scheibe '2' - kann man mit den Beträgen weiterrechnen; es gilt

$$L_{\mathrm{vor}} = \frac{3}{2}J_1\omega_1 - J_1\omega_1 = \frac{1}{2}J_1\omega_1 \qquad L_{\mathrm{nach}} = (J_1 + 3J_1)\omega_E$$

Gleichsetzen liefert

$$4J_1\,\omega_E = \frac{1}{2}J_1\,\omega_1$$

$$\omega_E = \frac{J_1}{2}\cdot\frac{1}{4J_1}\,\omega_1 = \frac{1}{8}\omega_1$$

Für die kinetischen Energie der Rotation gilt allgemein $E_{\text{kin}}^{\text{rot}} = \frac{1}{2} J\omega^2$

Kinetische Energie der Rotation vor der Kopplung

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}}(\text{vor}) = \frac{1}{2} J_1 {\omega_1}^2 + \frac{1}{2} J_2 {\omega_2}^2 = \frac{1}{2} J_1 {\omega_1}^2 + \frac{1}{2}(3J_1)(\frac{1}{4}{\omega_1}^2) = \frac{7}{8} J_1 {\omega_1}^2$$

Kinetische Energie der Rotation nach der Kopplung

$$E_{\text{kin}}^{\text{rot}}(\text{nach}) = \frac{1}{2}(J_1 + 3J_1){\omega_E}^2 = \frac{1}{2}(4J_1)(\frac{1}{64}{\omega_1}^2) = \frac{1}{32} J_1 {\omega_1}^2$$

In nicht-mechanische Energieformen umgesetzte mechanische Anfangsenergie ist

$$\Delta E = \left| E_{\text{kin}}^{\text{rot}}(\text{nach}) - E_{\text{kin}}^{\text{rot}}(\text{vor}) \right| = \left| \frac{1}{32} J_1 {\omega_1}^2 - \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{4} \cdot J_1 {\omega_1}^2 \right| = \frac{27}{32} J_1 {\omega_1}^2$$

Bezogen auf die anfangs vorhandene kinetische Energie ergibt sich

$$p = \frac{|\Delta E|}{E_{\text{kin}}^{\text{rot}}(\text{vor})} = \frac{\frac{27}{32} J_1 {\omega_1}^2}{\frac{28}{32} J_1 {\omega_1}^2} = \frac{27}{28} = 0{,}964$$

m.a. Worten: Beim Reibungsvorgang werden etwa 96 % der vorhandenen kinetischen Energie der Rotation in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt.

Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 3

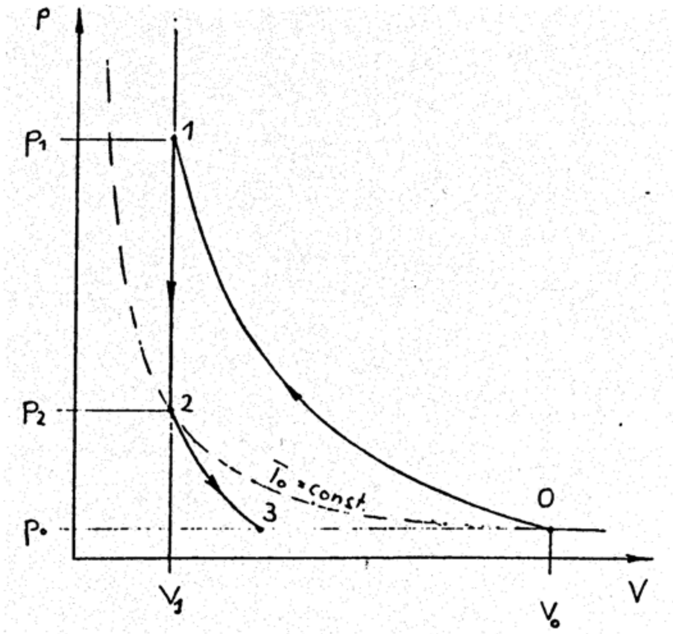
(a) Die speziellen Zustandsänderungen sind für

Prozess $'0' \to '1'$: Isentrope: $p_1 > p_0$; $V_1 < V_0$; $T_1 > T_0$

Prozess $'1' \to '2'$: Isochore: $p_0 < p_2 < p_1$; $V_2 = V_1$; $T_2 = T_0$

Prozess $'2' \to '3'$: Isentrope: $p_3 = p_0$; $V_1 < V_3 < V_0$; $T_3 < T_0$

Eingezeichnet ist als Hilfslinie die Isotherme für $\vartheta = 0\ ^\circ\mathrm{C}$.



(b) Für isentrope Zustandsänderungen gelten die POISSONschen Gleichungen, die jeweils zwei Zustandsgrößen und den Isentropenkoeffizienten κ des betrachteten Gases enthalten; also

$$pV^{\kappa} = \text{const.} \qquad TV^{\kappa-1} = \text{const.} \qquad p^{(1-\kappa)}T^{\kappa} = \text{const.}$$

Da in die jeweiligen Gleichungen nur Verhältnisse eingehen, muss das Anfangsvolumen V_0, das durch die Zustandsgleichung idealer Gase festgelegt ist, gar nicht explizit bekannt sein. Also – überflüssigerweise –

$$p_0 V_0 = nR_\mathrm{m} T_0$$

$$V_0 = \frac{nR_\mathrm{m}T_0}{p_0} = \frac{0{,}75\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}31\ \mathrm{Jmol^{-1}K^{-1}} \cdot 273\ \mathrm{K}}{10^5\ \mathrm{Nm^{-2}}} = 17{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^3} = 17{,}0\ \mathrm{dm^3}$$

Der Isentropenexponent κ ergibt sich aus der Anzahl der Freiheitsgrade f_ges der Moleküle des betrachteten Gases. Stickstoff ist ein zweiatomiges Gas, bei dem im Bereich der Raumtemperatur die Freiheitsgrade der Translation f_trans und der Rotation f_rot angeregt sind (vgl. den Praktikumsversuch zum 'Isentropenexponent'). Daraus ergibt sich der Isentropenexponent

$$\kappa(N_2) = \frac{f_\mathrm{ges} + 2}{f_\mathrm{ges}} = \frac{7}{5} = 1{,}40$$

(b1) Der Enddruck p_1 nach dem Prozess '0' $\rightarrow$ '1' ergibt sich aus

$$p_1 V_1^{\kappa} = p_0 V_0^{\kappa}$$

$$p_1 = \frac{V_0^{\kappa}}{V_1^{\kappa}} p_0 = (\frac{V_0}{V_1})^{\kappa} p_0 = (\frac{V_0}{\frac{1}{5} V_0})^{\kappa} p_0 = 5^{\kappa} \cdot p_0 = 5^{1,40} \cdot 1,0 \text{ bar} = 9,52 \text{ bar}$$

Die Endtemperatur T_1 nach dem Prozess '0' $\rightarrow$ '1' ergibt sich aus

$$T_1 V_1^{(\kappa-1)} = T_0 V_0^{(\kappa-1)}$$

$$T_1 = \frac{V_0^{(\kappa-1)}}{V_1^{(\kappa-1)}} T_0 = (\frac{V_0}{V_1})^{(\kappa-1)} T_0 = 5^{(\kappa-1)} \cdot T_0 = 5^{0,40} \cdot 273 \text{ K} = 1,90 \cdot 273 \text{ K} = 520 \text{ K}$$

Umrechnung der KELVIN-Temperatur auf CELSIUS-Temperatur

$T_1 = 520 \text{ K}$ entspricht $\vartheta_1 = (520 - 273)\ {}^{\circ}\text{C} = 247\ {}^{\circ}\text{C}$

Alternativer Lösungsweg: Für den Zustand '1' gilt die Zustandsgleichung idealer Gase; dazu muss allerdings das Anfangsvolumen V_0 berechnet worden sein (s.o.).

$$p_1 V_1 = n R_m T_1 \qquad \text{mit} \qquad V_1 = \frac{1}{5} V_0$$

$$T_1 = \frac{p_1 \cdot \frac{1}{5} V_0}{n R_m} = \frac{9,52 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2} \cdot \frac{1}{5} \cdot 17,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{0,75 \text{ mol} \cdot 8,31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}} = 519 \text{ K} \qquad \text{(Rundungsfehler!)}$$

(b2) Der 2. Hauptsatz der Wärmelehre $\Delta U = U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$ reduziert sich für ein adiabates System mit $\Delta Q_{12} = 0$ [Wärmeaustausch unterdrückt] auf

$$\Delta U = U_2 - U_1 = W_{12}$$

Die innere Energie U eines idealen Gases hängt nur von der absoluten Temperatur ab, deshalb kann ΔU aus End- und Anfangstemperatur des Prozesses '0' $\rightarrow$ '1' berechnet werden. Die zusätzlich benötigte molare isochore Wärmekapazität C_{mV} bestimmt sich wieder aus der Anzahl f_{ges} der Freiheitsgrade zu $C_{mV} = \frac{f_{ges}}{2} R_m$

$$W_{12} = U_2 - U_1 = n C_{mV} (T_2 - T_1) = n \cdot \frac{5}{2} R_m \cdot (T_2 - T_1)$$
$$= 0,75 \text{ mol} \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,31 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1} \cdot (520 - 273) \text{ K}$$
$$= 3,85 \text{ kJ}$$

Kontrollüberlegung: $W_{12} > 0$; dem System wird bei der Kompression vom Volumen V_0 auf V_1 Arbeit zugeführt.

(c) Für eine isochore Zustandsänderung vereinfacht sich die Zustandsgleichung idealer Gase auf

$$\frac{p}{T} = \text{const.}$$

Also gilt für die Zustandsänderung '1' $\rightarrow$ '2'

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$$ Mit der Zusatzforderung $T_2 = T_0$ wird

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 = \frac{T_0}{T_1} p_1 = \frac{273\ \mathrm{K}}{520\ \mathrm{K}} \cdot 9{,}52\ \mathrm{bar} = 5{,}00\ \mathrm{bar}$$

Alternativer Lösungsweg: Für den Zustand '2' gilt die Zustandsgleichung idealer Gase; dazu muss allerdings das Anfangsvolumen V_0 berechnet worden sein (s.o.).

$$p_2 V_2 = n R_\mathrm{m} T_2 \qquad \text{mit} \qquad V_2 = V_1 = \frac{1}{5} V_0 \qquad \text{und} \qquad T_2 = T_0 \text{ (Isotherme!)}$$

$$p_2 = \frac{n R_\mathrm{m} T_0}{\frac{1}{5} V_0} = \frac{0{,}75\ \mathrm{mol} \cdot 8{,}31\ (\mathrm{Nm})\ \mathrm{mol}^{-1}\ \mathrm{K}^{-1} \cdot 273\ \mathrm{K}}{\frac{1}{5} \cdot 17{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3} = 500 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 5{,}00\ \mathrm{bar}$$

(d) Zur Übung auch noch die Zahlenwerte für den Prozess '2' → '3'

Für die isentrope Zustandsänderung '2' → '3' gilt

$$p_3^{(1-\kappa)} T_3^{\kappa} = p_2^{(1-\kappa)} T_2^{\kappa}$$ Mit der Zusatzforderung $T_2 = T_0$ und $p_3 = p_0$ wird

$$p_0^{(1-\kappa)} T_3^{\kappa} = p_2^{(1-\kappa)} T_0^{\kappa}$$

$$T_3^{\kappa} = \frac{p_2^{(1-\kappa)}}{p_0^{(1-\kappa)}} T_0^{\kappa} \qquad \text{oder} \qquad T_3 = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{(1-\kappa)}{\kappa}} T_0$$

$$T_3 = \left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{(1-\kappa)}{\kappa}} T_0 = \left(\frac{5{,}00\ \mathrm{bar}}{1{,}00\ \mathrm{bar}}\right)^{\frac{-0{,}4}{1{,}4}} \cdot 273\ \mathrm{K} = (5{,}00)^{-0{,}286} \cdot 273\ \mathrm{K} = 172\ \mathrm{K}$$

Umrechnung der KELVIN-Temperatur auf CELSIUS-Temperatur

$T_3 = 173\ \mathrm{K}$ entspricht $\vartheta_3 = (172 - 273)\ ^\circ\mathrm{C} = -101\ ^\circ\mathrm{C}$

Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 4

Die Federkonstante c und die angehängte Masse M des Körpers bestimmen eindeutig die Eigenkreisfrequenz ω_0 des Federpendels; gemäß

$$\omega_0^2 = \frac{c}{M} = \frac{37{,}5\ \mathrm{Nm}^{-1}}{1{,}25\ \mathrm{kg}} = \frac{37{,}5\ \mathrm{kg\,m\,s}^{-2}\ \mathrm{m}^{-1}}{1{,}25\ \mathrm{kg}} = 30\ \mathrm{s}^{-2}$$

damit

$$\omega_0 = 5{,}48\ \mathrm{s}^{-1}$$

Damit wird mit $\omega_0 = 2\pi f_0$ die Eigenfrequez $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{5{,}48\ \mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = 0{,}872\ \mathrm{Hz}$

und mit $T_0 = \frac{1}{f_0}$ die Schwingungsdauer $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0{,}872\ \mathrm{s}^{-1}} = 1{,}15\ \mathrm{s}$

(b) Für eine harmonische Schwingung lässt sich das Weg,Zeit-Gesetz darstellen als

$$y = \hat{y} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \qquad \text{oder} \qquad y = \hat{y} \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Amplitude $\hat{y}$ und Nullphasenwinkel φ_0 sind auf die Anfangsbedingungen anzupassen. Diese sind $y(t=0)=15\text{ cm}$ und $\dot{y}(t=0)=0$. Bei Auslenken und Loslassen ohne Anfangsgeschwindigkeit muss die Anfangsauslenkung gleich der Amplitude sein und bei der Wahl der Cosinus-Funktion der Nullphasenwinkel gleich Null. Damit kann man schreiben

$$y = 15\text{ cm}\cdot\cos(5{,}48\text{ s}^{-1}\cdot t)$$

[damit können Sie auch nachweisen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt sind].

(c) Die Abnahme der Auslenkungen in gleichen Zeitintervallen um stets den gleichen Anteil ist ein Kennzeichen einer geschwindigkeitsproportionalen Reibung. Für die Einhüllende der gedämpften Schwingungen gilt dann

$$y = y_0\cdot e^{-\delta t}$$

also für Schwingungen im zeitlichen Abstand von (nT_0)

$$y_\mathrm{i} = y_0\cdot e^{-\delta t_\mathrm{i}} \qquad\qquad y_\mathrm{i+n} = y_0\cdot e^{-\delta t_\mathrm{i+n}}$$

und

$$\frac{y_\mathrm{i+n}}{y_\mathrm{i}} = \frac{y_0\cdot e^{-\delta t_\mathrm{i+n}}}{y_0\cdot e^{-\delta t_\mathrm{i}}} = e^{-\delta(t_\mathrm{i+n}-t_\mathrm{i})}$$

Umformen und Logarithmieren liefert allgemein

$$\ln[\frac{y_\mathrm{i+n}}{y_\mathrm{i}}] = \ln[e^{-\delta nT_0}] = -\delta nT_0$$

Dies gilt natürlich speziell auch für die ersten drei Schwingungsperioden unmittelbar nach Loslassen.

Bei einem Rückgang um 20 % der Auslenkungen gilt – bei schwacher Dämpfung – für das Verhältnis zweier Auslenkungen im zeitlichen Abstand von $t = 3T_0$

$$\frac{y_\mathrm{i+3}}{y_\mathrm{i}} = \frac{y_3}{y_0} = 0{,}80$$

Damit gilt

$$\ln[\frac{y_3}{y_0}] = -\delta 3T_0$$

$$\delta = \frac{-\ln[\frac{y}{y_0}]}{3T_0} = -\frac{-\ln[0{,}80]}{3\cdot 1{,}15\text{ s}} = \frac{-[-0{,}223]}{3{,}45\text{ s}} = 0{,}0646\text{ s}^{-1}$$

Der Dämpfungsgrad ist definiert als

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0{,}0646\text{ s}^{-1}}{5{,}48\text{ s}^{-1}} = 0{,}0118$$

[damit ist die obige Annahme schwacher Dämpfung gerechtfertigt]

(d) Für ein mathematisches Pendel gilt für die Schwingungsdauer

$$T_0^\mathrm{math} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Die Bedingung für die Schwingungsdauer lautet $T_0^{\text{math}} = T_0^{\text{Feder}} = T_0$.

damit wird

$$L = \frac{T_0{}^2 \cdot g}{4\pi^2} = \frac{(1{,}15\ \text{s})^2 \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}{4\pi^2} = 0{,}33\ \text{m}$$

Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 5

(a) Die auf die Feder wirkende äußere Kraft ist die Gewichtskraft auf den angehängten Körper; also

$$F_{\text{äuß}} = c\,x$$

Weil die Fallbeschleunigung g für alle Körper gleich ist, braucht man aber die einzelnen Massen gar nicht auf Gewichtskraft umzurechnen, man kann die zur Gewichtskraft proportionale Masse direkt gegen die Auslenkung auftragen. Es bietet sich eine Darstellung auf Querformat DIN A4 an. Die Messwerte sind in der Abbildung dargestellt.

(b) Durch die Messpunkte ist eine beste Gerade eingezeichnet. Zur Bestimmung der Steigung dieser Geraden wählt man zweckmäßigerweise ein möglichst großes Steigungsdreieck. Mit

$M_2 = 1{,}45\ \text{kg}$ bzw, $F_2 = 1{,}45\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$; und $x_2 = 0{,}460\ \text{m}$;

$M_1 = 0\ \text{kg}$ bzw. $F_1 = 0$ und $x_1 = 0\ \text{m}$

ergibt sich für die Steigung

$$m_{\text{Gerade}} = \frac{F_2 - F_1}{x_2 - x_1} = \frac{(M_2 - M_1)\cdot g}{x_2 - x_1} = \frac{1{,}450\ \text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}{0{,}460\ \text{m}} = 30{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Die Geradensteigung ist nach der Beziehung $F_{\text{äuß}} = c\,x$ gleich der Federkonstanten der untersuchten Feder; also lautet das Ergebnis

$$c = 30{,}9\ \text{N}\text{m}^{-1}$$

Ergänzung: Fehlerrechnung

Abschätzung des Größtfehlers der Steigung, also auch des Größtfehlers der Federkonstanten c .

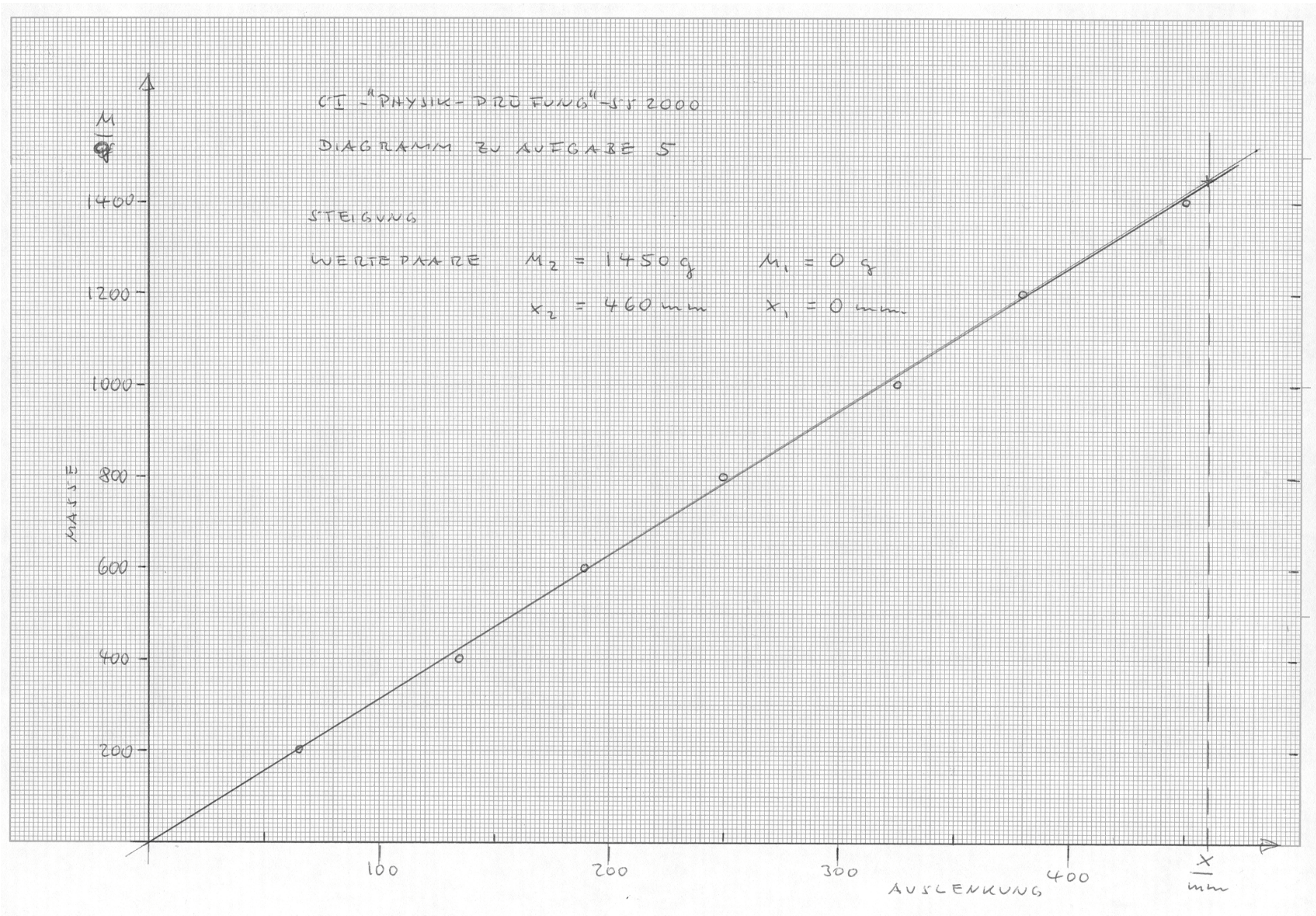
Bezieht man in einem zweiten bzw. dritten Steigungsdreick die Steigungen jeweils auf die gleiche Änderung der Auslenkkoordinate, dann stellt die Differenz der zur äußeren Kraft proportionalen Massenwerte $|M_2 - M_{\text{min}}| = 0{,}04\ \text{kg}$ bezogen auf die Masse $M_2 = 1{,}45\ \text{kg}$ der 'besten' Geraden direkt den relativen Fehler der Geradensteigung dar.

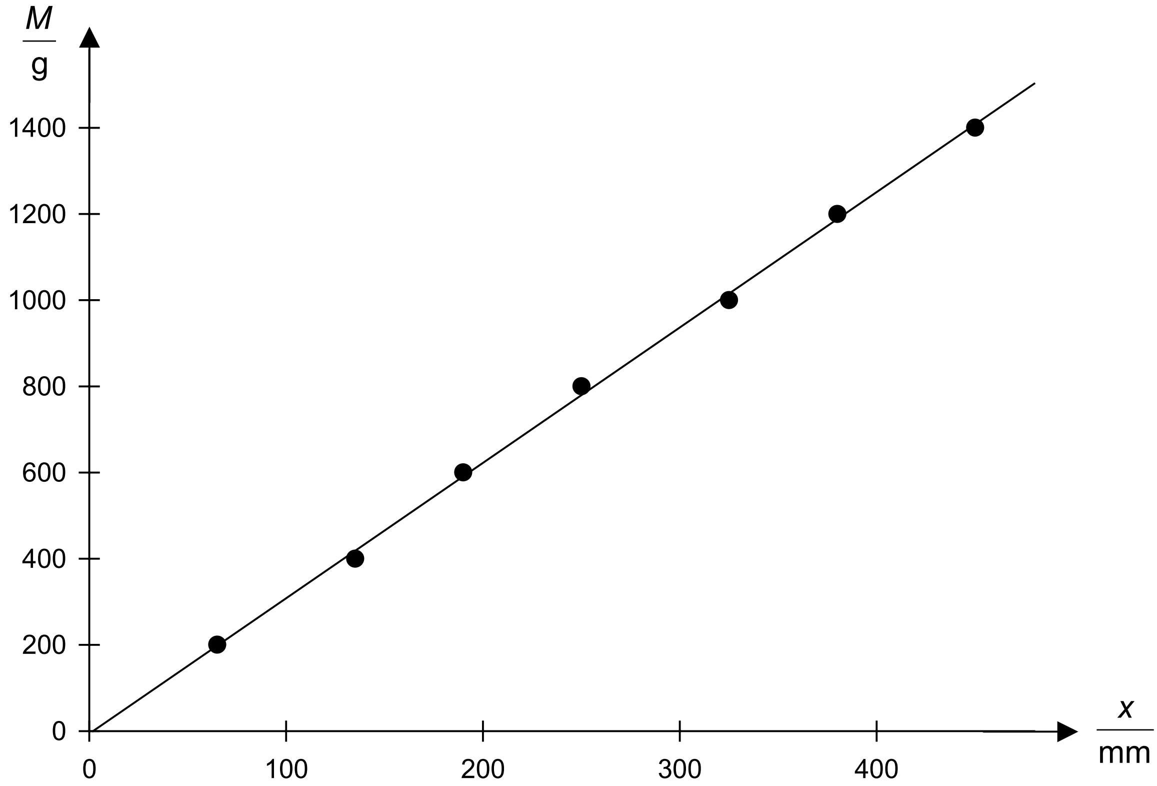
$$\frac{\Delta m_{\text{Gerade}}}{m_{\text{Gerade}}} = \frac{|M_2 - M_{\text{min}}| \cdot g}{M_2\, g} = \frac{0{,}040\ \text{kg}}{1{,}450\ \text{kg}} = 0{,}028\,;$$

nach oben gerundet also 3 %.

Endergebnis: Die Federkonstante der untersuchten Feder ist

$$c = 30{,}9\ \frac{\text{N}}{\text{m}}(1 \pm 3\%)$$


CI - "PHYSIK-PRÜFUNG" - SS 2000
DIAGRAMM ZU AUFGABE 5
STEIGUNG
WERTEPAARE $M_2 = 1450\,g$ $M_1 = 0\,g$
$x_2 = 460\,mm$ $x_1 = 0\,mm$
$\frac{M}{g}$
MASSE
1400
1200
1000
800
600
400
200
100
200
300
400
AUSLENKUNG
$\frac{x}{mm}$



Physik-Prüfung SS 2000 - Chemieingenieurwesen - Lösung zu Aufgabe 6

(a) Zweckmäßigerweise rechnet man zuerst sämtliche Messwerte auf SI-Basiseinheiten um.

Steighöhe $h = 71{,}5\ \text{mm} = 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}$

Durchmesser $D = 0{,}300\ \text{mm}$ Radius $r = 0{,}150\ \text{mm} = 0{,}150 \cdot 10\ \text{m}$

Dichte $\rho = 1{,}260\ \text{gcm}^{-3} = 1{,}260 \cdot 10^{3}\ \text{kgm}^{-3}$

Damit erhält man für die Oberflächenspannung aus den Messwerten

$$\sigma = \frac{1}{2} r h \rho g = \frac{1}{2} \cdot 0{,}150 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot 71{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot 1{,}260 \cdot 10^{3}\ \text{kgm}^{-3} \cdot 9{,}81\,\text{ms}^{-2}$$

$$= 66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{kgms}^{-2} \cdot \text{m}^{-1} = 66{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$$

(b) Die auszuwertende Beziehung für die Oberflächenspannung ist ein reines Potenzgesetz; deshalb kann der relative Größtfehler einfach angegeben werden. Bei der Bestimmung der Zahlenwerte ist es nur wichtig, dass in Zähler und Nenner die gleichen Einheiten stehen; eine Umrechnung in SI-Basiseinheiten ist entbehrlich. Weiterhin kann, weil der Radius r proportional zum Durchmesser D ist, der Durchmesser und sein geschätzter Fehler direkt eingesetzt werden.

Für den relativen Größtfehler gilt damit

$$\left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right| = \pm\left[\left|\frac{\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| + \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| + \left|\frac{\Delta g}{g}\right|\right]$$

$$= \pm\left[\left|\frac{0{,}002\ \text{mm}}{0{,}300\ \text{mm}}\right| + \left|\frac{0{,}5\ \text{mm}}{71{,}5\ \text{mm}}\right| + \left|\frac{0{,}005\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}{1{,}260\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}}\right| + \left|\frac{0}{9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}}\right|\right]$$

$$= \pm\left[\frac{2}{300} + \frac{5}{715} + \frac{5}{1260} + 0\right]$$

$$= \pm[6{,}67 + 6{,}99 + 3{,}97]\cdot 10^{-3} = \pm 17{,}63\cdot 10^{-3}$$

Nach oben gerundet ergibt dies $\left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right| = \pm 1{,}8\ \%$

Der absolute Fehler wird damit

$$\Delta\sigma = \left|\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right|\cdot\sigma = \pm 0{,}018\cdot 66{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1} = 1{,}2\cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$$

(c) Das Endergebnis der Messung lässt sich damit angeben als

$\sigma = (66{,}3 \pm 1{,}2)\cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1}$ oder $\sigma = (66{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{Nm}^{-1})(1 \pm 2\ \%)$