(a) Entscheidend für die Anwendung des Impulserhaltungssatzes (IES) ist die Summe der äusseren Kräfte auf das System der beiden Massen m_1 und m_2, also

$$\sum \vec{F}_{ext,\, i} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},$$ wobei p_x = Gesamtimpuls in x-Richtung, p_y =...usw.

Da in x-Richtung nur innere Kräfte für die Beschleunigung der beiden Massen verantwortlich sind gilt $F_x = 0$ und somit ist p_x = konst. In y-Richtung wirken aber drei äussere Kräfte auf das System und im allgemeinen ist $F_y = - m_1 g - m_2 g + F \neq 0$ Deshalb gilt der IES in y-Richtung nicht. (Bem.: Der Wagen wird zunächst in y-Richtung beschleunigt und dann wieder abgebremst, d.h. F_y wechselt sogar das Vorzeichen!).

(b) Aus dem IES in x-Richtung $0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$ folgt

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}\, v_1 .$$

Der Energieerhaltungssatz der Mechanik liefert eine zweite Gleichung für v_1 und v_2.

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 \; v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \; v_2^2$$

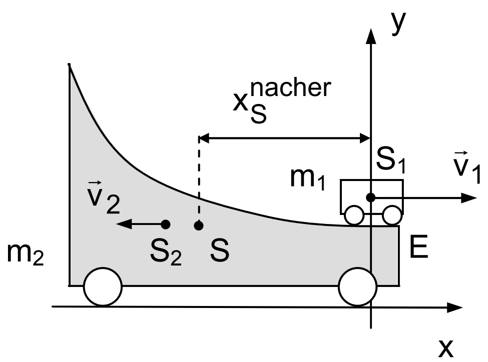
Die Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 + m_1^2}}\,\sqrt{2 \; g \; h} = \sqrt{\frac{20 \; kg^2}{20 \; kg^2 + 4 \; kg^2}}\,\sqrt{2 \; (9.81 \; m/s^2) \; (0.2 \; m)} = 1.81 \; m/s$$

bzw. $v_2 = - (m_1/m_2)\, v_1 = - (2/10)\, v_1 = - 0.362$ m/s. Für die Relativgeschwindigkeit der beiden Massen ergibt sich dann

$$v_{rel} = v_1 - v_2 = 1.81 \; m/s - (-0.362 \; m/s) = 2.17 \; m/s .$$

(c) Aufgrund des IES ändert sich die x-Koordinate des gemeinsamen Schwerpunkts während der gesamten Bewegung nicht. Deshalb kann man die zurückgelegte Strecke x_1 der Masse m_1 auch berechnen, indem man den Abstand von m_1 zum gemeinsamen Schwerpunkt am Anfang und am Ende berechnet. Am Anfang beträgt dieser Abstand



$$x_S^{vorher} = \frac{m_2 \; x_2}{m_1 + m_2} .$$ Am Ende ist dann

$$x_S^{nacher} = \frac{- m_2 \; (3 \; x_2)}{m_1 + m_2}$$ (siehe rechte Skizze).

Somit ergibt sich für

$$x_1 = \left| x_S^{vorher} \right| + \left| x_S^{nachher} \right| = \frac{4 \; m_2 \; x_2}{m_1 + m_2} = \frac{40}{12} \; (12 \; cm) = 40 \; cm .$$

a) Das Massenträgheitsmoment J_R wird berechnet nach der bekannten Beziehung für einen dickwandigen Hohlzylinder, also

$$J_R = \frac{1}{2} m \ (r_a^2 + r_i^2) = 8{,}743 \cdot 10^3 \ \text{kg} \ \text{m}^2 .$$

Das Massenträgheitsmoment J_s des Systems ist 110 % von J_R.

$$J_s = J_R \cdot 1{,}1 = 9{,}617 \cdot 10^3 \ \text{kg m}^2$$

b) Die Energie wird gespeichert als Rotationsenergie E_{kin}^{rot} bei maximaler Drehfrequenz n_{max}. Somit ist

$$n_{max} = 500 / 60 \ \text{s} = 8{,}333 \cdot \text{s}^{-1} \ \text{und} \ \omega_{max} = 2\pi \cdot n_{max} = 52{,}36 \text{s}^{-1}$$

und

$$E_{max} = \frac{1}{2} J_s \cdot \omega_{max}^2 = 1{,}318 \cdot 10^7 \ \text{kg} \ \text{m}^2 \ \text{s}^{-2} = 1{,}32 \cdot 10^7 \ \text{Joule} = 3{,}66 \ \text{kWh} .$$

c) Die Winkelbeschleunigung α ist hier konstant. Dann gilt

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_{max}}{t} = 5{,}236 \cdot \text{s}^{-2} .$$

Das Drehmoment M folgt aus dem 2. NEWTONschen Axiom bei konstantem Massenträgheitsmoment.

$$M = J_s \cdot \alpha = 9{,}617 \cdot 10^3 \ \text{kg m}^2 \cdot 5{,}236 \cdot \text{s}^{-1} = 5{,}035 \cdot 10^4 \ \text{Nm}$$

und somit ergibt sich die Leistung am Ende des Beschleunigungsvorgangs zu

$$P = M \cdot \omega_{max} = 2{,}636 \cdot 10^6 \ \text{Nm s}^{-1} = 2{,}64 \ \text{MW} .$$

d) Die abgegebene Energie ist gleich der Differenz der Rotationsenergien. Da die Rotationsenergie proportional zum Quadrat der Winkelgeschwindigkeit ist, folgt schnell

$$E / E_{max} = (\omega / \omega_{max})^2 = \frac{1}{16}$$

bzw.

$$\Delta E = \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot E_{max} = \frac{15}{16} \cdot E_{max} .$$

(a) Nach dem HOOKEschen Federgesetz berechnet sich die resultierende Federkonstante bei symmetrischer Belastung aus F = - c_{res} Δy, wobei F = 4 (m g) ist.

$$c_{res} = \frac{F}{\Delta y} = \frac{4\ (70\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2)}{0.03\ \text{m}} = 9.16 \cdot 10^4\ \text{N/m}$$

Bei vier parallel geschalteten Federn addieren sich die Federkonstanten zu $c_{res} = c_1 + c_3 + c_3 + c_4$ und somit ist

$$c_i = \frac{1}{4} c_{res} = \frac{1}{4}(9.16 \cdot 10^4\ \text{N/m}) = 2.29 \cdot 10^4\ \text{N/m}.$$

(b) Die Schwingungsdauer des belasteten Modells ist dann

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{ges}}{c_{res}}} = 2\pi\sqrt{\frac{1400\ \text{kg} + 4\ (70\ \text{kg})}{9.16 \cdot 10^4\ \text{N/m}}} = 0.851\ \text{s}$$

und die Frequenz ergibt sich zu $f_0 = 1/T_0 = 1.18$ Hz.

(c) Die Amplitudenresonanzkurve A(η) hat ihr Maximum an der Stelle η_{res}. Dieser Wert hängt aber wie folgt vom Dämpfungsgrad D ab

$$\eta_{res} = \sqrt{1 - 2\ D^2} = \sqrt{1 - 2\ (0.4)^2} = 0.825$$

und ist hier nicht gleich eins. Für das Kreisfrequenzverhältnis gilt $\eta = \omega_e/\omega_0 = f_e/f_0$ und somit ist

$$f_{res} = f_0\ \eta_{res} = (1.18\ \text{Hz})(0.825) = 0.974\ \text{Hz}.$$

(d) Die Anregungsfrequenz für die Schwingung in y-Richtung ist abhängig von der Geschwindigkeit v des Wagens in x-Richtung. Berechnet man v = Δx/Δt über den Abstand Δx der Wellenberge und der Zeit $\Delta t = 1/f_e$ zwischen zwei "Stössen" so ergibt sich

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{L}{1/f_{res}} = (2.7\ \text{m})(0.974\ \frac{1}{\text{s}}) = 2.62\ \text{m/s} = 9.42\ \text{km/h}.$$

Die Anregungsamplitude lässt sich aus der Skizze zu A_e = H/2 ablesen. Somit erhält man für die Resonanzamplitude

$$A_{res} = A_e \frac{1}{2\ D\ \sqrt{1 - D^2}} = (5\ \text{cm}) \frac{1}{2\ (0.4)\ \sqrt{1 - (0.4)^2}} = 6.82\ \text{cm}.$$

.

Lösung zu Aufgabe 4 **Physik-Prüfung SS00**

a) Die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet sich aus

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{60\ \mathrm{N}}{0.1\ \mathrm{kg}\,/\,\mathrm{m}}} = 24.5\ \mathrm{m/s}\,.$$

b) Die abgegebene Leistung des Motors ist $P = \frac{1}{2}\mu\ c\ \omega^2\ \hat{y}^2$ und somit ergibt sich

$$\omega = \sqrt{\frac{2\,P}{\mu\ c\ \hat{y}^2}} = \sqrt{\frac{2\ (100\ \mathrm{W})}{(0.1\ \mathrm{kg/m})\ (24.5\ \mathrm{m/s})\ (1\cdot 10^{-2}\mathrm{m})^2}} = 904\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}},$$

bzw. $f = \omega/(2\,\pi) = 144$ Hz.

c) Mit $c = f\,\lambda$ folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{24.5\ \mathrm{m/s}}{144\ 1/\mathrm{s}} = 0.170\ \mathrm{m} = 17.0\ \mathrm{cm}\,.$$

d) Die zeitlichen Ableitungen der Wellenfunktion

$$y(t) = \hat{y}\ \sin(\,k\,x - \omega\,t\,)$$

ergeben

$$\dot{y}(t) = -\,\omega\,\hat{y}\ \cos(\,k\,x - \omega\,t\,) \qquad \text{und}$$

$$\ddot{y}(t) = -\,\omega^2\ \hat{y}\ \sin(\,k\,x - \omega\,t\,)\,.$$

Deshalb folgt für die maximale Transversalgeschwindigkeit

$$v_{max} = \omega\,\hat{y} = (904\ \mathrm{rad/s})\ (10^{-2}\ \mathrm{m}) = 9.04\ \mathrm{m/s}\,,$$

bzw. Transversalbeschleunigung

$$a_{max} = \omega^2\ \hat{y} = (904\ \mathrm{rad/s})^2\ (10^{-2}\ \mathrm{m}) = 8.17\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}^2\,.$$

Verglichen mit der Erdbeschleunigung entspricht dies also 833 g.

Lösung zu Aufgabe 5 **Physik-Prüfung SS 00**

a) Mit der Isentropengleichung $p_1V_1^{\kappa} = p_2 \cdot V_1^{\kappa}$ und dem Isentropenkoeffizient für Luft $\kappa = (f+2)/f = 1.4$ (da f=5) ergibt sich

$$p_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} \cdot p_1 = 8^{1,4} \cdot 1{,}0 \text{ bar} = 18{,}4 \text{ bar} .$$

Aus der Gleichung $n = p_1 V_1 / (R_m T_1)$ für die Stoffmenge folgt

$$T_2 = \frac{p_2V_2}{n \cdot Rm} = \frac{p_2RmT_1V_2}{p_1V_1 \cdot Rm} = \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{V_2}{V_1} \cdot T_1 = 690 \text{ K} .$$

b) Aus dem 1. Hauptsatz $\Delta U_{23} = Q_{23} + W_{23}$ folgt mit $W_{23} = 0$ (Isochore), dass

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = n \cdot \frac{f}{2} \cdot R_m \cdot \left(T_3 - T_2\right) = 1011{,}1 \text{ J} = Q_{24} ,$$

weil $T_3 = (p_3/p_2)\, T_2 = 1500$ K ist.

c) Der Druck p_4 ergibt sich wiederum aus der Isentropengleichung

$$p_4 = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\kappa} \cdot p_3 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} \cdot p_3 = 2{,}18 \text{ bar} ,$$

und die Temperatur aus der allgemeinen Gasgleichung

$$T_4 = \frac{p_4 \cdot V_4}{n \cdot Rm} = \frac{p_4 \cdot V_1}{n \cdot Rm} = 655{,}5 \text{ K} .$$

d) Für die isochore Zustandsänderung gilt $W_{41} = 0$. Somit ist

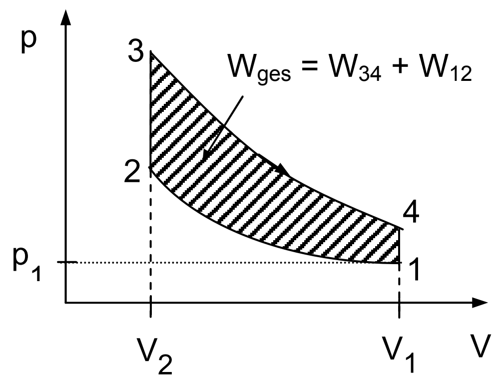
$$Q_{41} = \Delta U_{41} = n \cdot f \cdot \frac{Rm}{2}\left(T_1 - T_4\right) = -443{,}4 \text{ J} = Q_{ab} .$$

e) Der Flächeninhalt der umschlossenen p-V-Kurve entspricht der von der Maschine nach aussen abgegebenen Arbeit W_{ges}. Mit $Q_{12} = 0$ und $Q_{34} = 0$ folgt

$$W_{12} = \Delta U_{12} = n \cdot f \cdot \frac{Rm}{2}\left(T_2 - T_1\right) = 485 \text{ J}$$

bzw.

$$W_{43} = \Delta U_{43} = n \cdot f \cdot \frac{Rm}{2}\left(T_4 - T_3\right) = -1053 \text{ J}$$



und somit

$$W_{ges} = W_{43} + W_{12} = -1053 \text{ J} + 485 \text{ J} = -578 \text{ J}$$

.

f) Der thermodynamische Wirkungsgrad ist dann

$$\eta_{th} = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{W_{ges}}{Q_{zu}} = \frac{568\ \text{J}}{1011\ \text{J}} = 0{,}562\,.$$

Die entspricht 56.2 %.

g) Für eine Carnot-Maschine zwischen T_3 und T_1 bekäme man

$$\eta_{thc} = \frac{T_3 - T_1}{T_3} = \frac{1500 - 300}{1500} = 0{,}8\,,$$

also einen thermodynamischen Wirkungsgrad von 80 %.