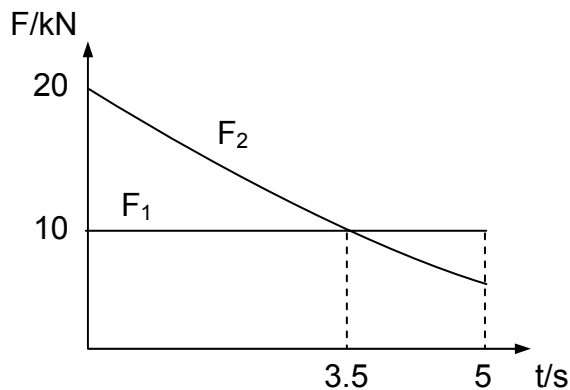


Lösung zu Aufgabe 1

Physik-Prüfung WS 99

(a) Konstante und zeitabhängige Kraft in einem Diagramm:



$$F_1(t) = 10 \text{ kN}$$

$$F_2(t) = F_0 e^{-t/T}$$

wobei $F_0 = 20 \text{ kN}$ und $T = 5 \text{ s}$.

(b) Eine konstante Kraft liefert aufgrund des 2. Newtonschen Axioms $F = m a$ eine konstante Beschleunigung

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10^4 \text{ N}}{2000 \text{ kg}} = 5 \text{ m/s}^2.$$

Da Anfangsort $x_0 = 0$ und Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ festgelegt sind, folgt für diese gleichmäßige Beschleunigung

$$v(t) = a t \quad \text{und} \quad x(t) = \frac{1}{2} a t^2.$$

Somit erhält man nach $t = 5 \text{ s}$

$$v = (5 \text{ m/s}^2) (5 \text{ s}) = 25 \text{ m/s}$$

und

$$x = \frac{1}{2} (5 \text{ m/s}^2) (5 \text{ s})^2 = 62.5 \text{ m}.$$

(c) Für die zeitabhängige Kraft

$$F_2(t) = F_0 e^{-t/T}$$

ergibt sich die zeitabhängige Beschleunigung

$$a(t) = \frac{F_0}{m} e^{-t/T}.$$

Die zeitabhängige Geschwindigkeit $v(t)$ erhält man dann durch Integration der Funktion $a(t)$.

$$v(t) = \int a(t) dt + c_1 = \int \frac{F_0}{m} e^{-t/T} dt + c_1 = -\frac{F_0 T}{m} e^{-t/T} + c_1$$

Die Integrationskonstante c_1 folgt aus der Anfangsbedingung $v(t=0) = 0$.

$$c_1 = \frac{F_0 T}{m}$$

Somit ergibt sich

$$v(t) = \frac{F_0 T}{m} (1 - e^{-t/T}).$$

Die Ortsfunktion $x(t)$ folgt nun durch eine weitere Integration.

$$x(t) = \int v(t) dt + c_2 = \int \frac{F_0 T}{m} (1 - e^{-t/T}) dt + c_2 = \frac{F_0 T}{m} (t - T e^{-t/T}) + c_2$$

Die Integrationskonstante c_2 wird aus der Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$ bestimmt.

$$c_2 = -\frac{F_0 T^2}{m}$$

Somit ergibt sich

$$x(t) = \frac{F_0 T^2}{m} \left(\frac{t}{T} + e^{-t/T} - 1 \right).$$

Für den Zeitpunkt $t = 5$ s erhält man für Ort und Geschwindigkeit

$$x = \frac{(20 \cdot 10^3 \text{ N}) (5 \text{ s})^2}{2000 \text{ kg}} (1 + e^{-1} - 1) = (250 \text{ m}) e^{-1} = 92.0 \text{ m}$$

und

$$v = \frac{(20 \cdot 10^3 \text{ N}) (5 \text{ s})}{2000 \text{ kg}} (1 - e^{-1}) = 50 \text{ m/s} (1 - e^{-1}) = 31.6 \text{ m/s}.$$

Lösung zu Aufgabe 2

Physik-Prüfung WS 99

(a) Der Waagebalken dreht sich um die Achse durch den eigenen Schwerpunkt. Es ist $r \ll L$, so dass

$$J_{\text{St}} = \frac{1}{12} m_{\text{St}} \cdot L_{\text{St}}^2 = \frac{1}{12} \cdot 0.120 \text{ kg} \cdot (0.30 \text{ m})^2 = 9.0 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2$$

Der Zeiger dreht sich um eine Achse durch seinen Endpunkt simuliert durch eine ebenfalls dünne Stange. Nach STEINER ist das Massenträgheitsmoment des Zeigers

$$\begin{aligned} J_Z &= \frac{1}{12} m_Z \cdot L_Z^2 + m_Z \cdot \left(\frac{L_Z}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_Z \cdot L_Z^2 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (0.20 \text{ m})^2 \\ &= 3.33 \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2. \end{aligned}$$

Das gesamte Massenträgheitsmoment bezüglich Drehachse durch D wird damit

$$J_D = J_{\text{St}} + J_Z = (9.0 + 3.33) \cdot 10^{-4} \text{ kg m}^2 = 1.23 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2.$$

(b) Der Waagebalken ist in seinem Schwerpunkt gelagert; es wird aus Symmetriegründen von ihm kein resultierendes Moment ausgeübt. Das rücktreibende Drehmoment kommt allein durch die Auslenkung des Schwerpunkts des Zeigers aus der Ruhelage zustande. Dieses Drehmoment ist

$$M_{\text{rück}} = -(m_Z \cdot g) \cdot \left(\frac{L_Z}{2} \cdot \sin \beta\right) \approx -m_Z \cdot g \cdot \frac{L_Z}{2} \cdot \beta$$

mit der Linearisierung $\sin \beta \approx \beta$ für kleine Ausschläge.

Das NEWTONSche Grundgesetz für Drehbewegungen lautet

$$M = J_D \cdot \ddot{\beta}$$

Mit den obigen Beziehungen für M und J_D folgt daraus

$$\ddot{\beta} + \frac{m_Z \cdot g \cdot L_Z}{2 J_D} \cdot \beta = 0.$$

Damit wird

$$\omega_0^2 = \frac{m_Z \cdot g \cdot L_Z}{2 \cdot J_D} = \frac{25 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m s}^{-2} \cdot 0.20 \text{ m}}{2 \cdot 1.23 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2} = 20.0 \text{ s}^{-2} \quad ; \text{ also}$$

$\omega_0 = 4.47 \text{ s}^{-1}$ und damit

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1.41 \text{ s}.$$

(c) Es gilt für das Abklingen der Ausschläge der gedämpften Schwingung

$$\beta_{\text{Hüll}} = \beta_0 e^{-\delta t} \quad \text{oder} \quad \frac{\beta_{\text{Hüll}}}{\beta_0} = e^{-\delta \cdot t} \quad \text{bzw.} \quad \ln\left[\frac{\beta_{\text{Hüll}}}{\beta_0}\right] = -\delta \cdot t.$$

Mit den Vorgaben $\frac{\beta_{\text{Hüll}}}{\beta_0} = \frac{1}{5}$ für $t = 7 \cdot T_0$ wird der Abklingkoeffizient

$$\delta = -\frac{\ln\left[\frac{1}{5}\right]}{7 \cdot 1.41 \text{ s}} = 0.164 \text{ s}^{-1}$$

und damit der Dämpfungsgrad

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{0.164 \text{ s}^{-1}}{4.47 \text{ s}^{-1}} = 3.67 \cdot 10^{-2}.$$

Die Kreisfrequenzen und die Schwingungsdauern mit und ohne Dämpfung sind über den Dämpfungsgrad folgendermaßen verknüpft.

$$\frac{\omega_d}{\omega_0} = \sqrt{1 - D^2} = \frac{T_0}{T_d},$$

da $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Somit wird

$$T_d = \frac{T_0}{\sqrt{1 - D^2}} = 1.001 \cdot T_0.$$

Damit beträgt die Abweichung der beiden Schwingungsdauern T_d und T_0 gerade etwa 0.1%.

Lösung zu Aufgabe 3

Physik-Prüfung WS 99

(a) Bei dem Drehmanöver im weiten Weltenraum wirken nur innere Momente. Deshalb gilt der 'Drehimpulserhaltungssatz'. Weil der Drehimpuls anfangs Null war, muss er auch Null bleiben. Die Drehimpulse von Raumkapsel und Elektromotor müssen deshalb einander entgegengerichtet sein (Bei einer Drehung um $\varphi = 180^\circ$ ist die Drehrichtung des Motors unerheblich). Für die Beträge des Drehimpulses gilt

$$|\vec{L}_{\text{Raumkapsel}}| = |\vec{L}_{\text{Elektromotor}}|$$

$$J_R \cdot \omega_R = J_M \cdot \omega_M$$

$$\omega_R = \frac{J_M}{J_R} \cdot \omega_M = \frac{0.2 \text{ kg m}^2}{3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^2} \cdot \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^3}{60 \text{ s}} = 2.09 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}.$$

Dabei gilt für die Massenträgheitsmomente $J_M \ll J_R$.

(b) Vernachlässigt man die Zeitintervalle für Anlauf und Abbremsen des Motors, dann sind ω_M und ω_R zeitlich konstant, d.h. in gleichen Zeitintervallen werden gleiche Winkel überstrichen. Aus der Definition der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_R = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \text{ folgt}$$

$$\Delta\varphi = \omega_R \cdot \Delta t.$$

Für einen Drehwinkel von $\varphi = \pi$ wird also die Zeit

$$\Delta t = \frac{\pi}{2.1 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}} = 150 \text{ s}$$

benötigt.

(c) Es muss Beschleunigungsarbeit aufgebracht werden um die kinetischen Energien der Rotation für Raumkapsel und Elektromotor aufzubringen. Dazu kommen noch mögliche Verluste. Also

$$\begin{aligned} W &\geq \frac{1}{2} J_R \cdot \omega_R^2 + \frac{1}{2} J_M \cdot \omega_M^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ kg m}^2 \cdot [2.09 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}]^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 \text{ kg m}^2 \cdot [2\pi \cdot \frac{3000}{60 \text{ s}}]^2 \\ &= (0.655 + 9870) \text{ J} = 9870 \text{ J}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Beziehung $\omega_M = 2\pi \cdot n_M$ benutzt.

Lösung zu Aufgabe 4

Physik-Prüfung WS99

Die allgemeine Beziehung für den DOPPLER-Effekt für Schallwellen, wenn sich sowohl Sender 'S' als auch Empfänger 'E' bewegen, lautet

$$f = f_0 \cdot \frac{1 \pm \beta_E}{1 \mp \beta_S} \quad \text{wobei } \beta = \frac{v}{c}.$$

Das obere Vorzeichen gilt für Annäherung, das untere für Entfernung:

v_E = Geschwindigkeit des Empfängers 'E' (Streifenwagen)

β_E = relative Geschwindigkeit des Streifenwagens

v_S = Geschwindigkeit des Senders 'S' (Motorrad)

β_S = relative Geschwindigkeit des Motorrads.

1. Phase: Motorrad und Streifenwagen fahren aufeinander zu, also gilt 'Annäherung'

$$f_1 = f_0 \cdot \frac{1 + \beta_E}{1 - \beta_S}$$

2. Phase: Motorrad und Streifenwagen entfernen sich voneinander; also gilt 'Entfernung'

$$f_2 = f_0 \cdot \frac{(1 - \beta_E)}{(1 + \beta_S)}$$

Das Verhältnis der vom Empfänger (Polizisten) gehörten Frequenzen ist damit

$$\alpha = \frac{f_1}{f_2} = \frac{(1 + \beta_E)}{(1 - \beta_S)} \cdot \frac{(1 + \beta_S)}{(1 - \beta_E)} = \frac{(1 + \beta_E)}{(1 - \beta_E)} \cdot \frac{(1 + \beta_S)}{(1 - \beta_S)} = \frac{5}{4} \quad (\text{Terz!}).$$

$$\text{Mit } \beta_E = \frac{v_E}{c} = \frac{50 \text{ km h}^{-1}}{340 \text{ m s}^{-1}} = \frac{50 \cdot 10^3 \text{ m}}{3.6 \cdot 10^3 \text{ s} \cdot 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 0.04085 \quad \text{wird}$$

$$\frac{(1 + \beta_E)}{(1 - \beta_E)} = \frac{1.04085}{0.95915} = 1.085 \quad \text{und damit}$$

$$\frac{(1 + \beta_S)}{(1 - \beta_S)} = \frac{1}{1.085} \cdot \frac{5}{4} = 1.152.$$

Somit

$$(1 + \beta_S) = 1.152 \cdot (1 - \beta_S)$$

$$2.152 \cdot \beta_S = 0.152$$

$$\beta_S = 0.0706.$$

Die Geschwindigkeit des Motorradfahrers ist also

$$v_S = \beta_S \cdot c = 0.0706 \cdot 340 \text{ m s}^{-1} = 24.0 \text{ m s}^{-1} = 86.4 \text{ km h}^{-1}.$$

Und das gibt Punkte in Flensburg!

(a) Der Taschenrechner liefert für den Zahlenwert der Zentripetalbeschleunigung

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{[(25 / 3.6) \text{ m/s}]^2}{8 \text{ m}} = 6.02816358 \text{ m/s}^2.$$

Da der Radius r nur auf eine Stelle genau bekannt ist, muss das Endergebnis dieser Rechnung auf eine signifikante Stelle gerundet werden. Tut man dies nicht, dann würde man eine Genauigkeit suggerieren, die nicht vorhanden ist. Somit lautet die ehrliche Antwort

$$a_z = 6 \text{ m/s}^2.$$

Da immer die letzte signifikante Stelle gerundet wird beträgt die Unsicherheit im Endergebnis $\pm 0.5 \text{ m/s}$. Zusammengefaßt schreibt man deshalb also

$$a_z = (6 \pm 0.5) \text{ m/s}^2.$$

Dies bedeutet, dass eine Zentripetalbeschleunigung von 6.5 m/s notwendig sein kann, um das Auto auf der Kreisbahn zu halten.

(b) Da die Reibungskraft $F_R = \mu N$ die Zentripetalkraft $F_Z = m a_z$ liefert, ist

$$m a_z = \mu m g.$$

Die maximal mögliche Zentripetalbeschleunigung $a_{z,\text{max}}$ ergibt sich deshalb zu

$$a_{z,\text{max}} = \mu g = (0.65)(9.81 \text{ m/s}^2) = 6.4 \text{ m/s}^2.$$

Da $a_{z,\text{max}} < 6.5 \text{ m/s}^2$ ist, kann man im Rahmen der Fehlerabschätzung aus Teilaufgabe (a) nicht sicher sein, ob die Haftreibungskraft groß genug ist, um das Auto auf der Kreisbahn zu halten.

(c) Mit Hilfe der statistischen Funktionen eines Taschenrechners ergibt sich der Mittelwert der Geschwindigkeit \bar{v} zu

$$\bar{v} \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i = 25.02 \text{ km/h}.$$

Die Standardabweichung s beträgt

$$s = \sqrt{\frac{\sum (v_i - \bar{v})^2}{(N-1)}} = 0.2639 \text{ km/h}.$$

Der mittlere Fehler des Mittelwerts ist demnach

$$\Delta \bar{v} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0.2639 \text{ m/s}}{\sqrt{6}} = 0.1078 \text{ km/h}.$$

(d) Mit den Zahlenwerten aus Teilaufgabe (c) wird die Zentripetalbeschleunigung neu berechnet.

$$a_z = \frac{v^2}{r} = \frac{[(25.02 / 3.6) \text{ m/s}]^2}{8 \text{ m}} = 6.0378 \text{ m/s}^2$$

Da für a_z ein reines Potenzgesetz vorliegt, gilt für den relativen Größtfehler

$$\begin{aligned} \frac{\Delta a_z}{a_z} &= \left(2 \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}} + \frac{\Delta r}{\bar{r}} \right) = \left(2 \frac{0.1078}{25.02} + \frac{0.1}{8} \right) \\ &= (8.617 \cdot 10^{-3} + 12.5 \cdot 10^{-3}) \\ &= 2.112 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Der absolute Größtfehler ist dann

$$\Delta a_z = (2.112 \cdot 10^{-2}) a_z = 0.1275 \text{ m/s}^2.$$

Da Fehler im Endergebnis mit ein oder zwei signifikanten Stellen angegeben werden, ergibt sich

$$a_z = (6.04 \pm 0.13) \text{ m/s}^2.$$

(e) Aufgrund der Untersuchungen in Teilaufgabe (d) kann man mit großer Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass der Wagen auf der Kreisbahn bleibt, da der Maximalwert $a_{z,\text{max}}$ weit außerhalb des Fehlerintervalls liegt ($a_{z,\text{max}} > a_z + 2 \Delta a_z$). Die Aussage aus Teil (b) muss also revidiert werden.

Lösung zu Aufgabe 6

Physik-Prüfung WS 99

(a) Aus der allgemeinen Gasgleichung $p V = n R T$ folgt für eine isochore Zustandsänderung ($V = \text{konst}$) der Druck p_2 zu

$$p_2 = p_1 \frac{T_1}{T_2} = (1 \text{ bar}) \frac{423 \text{ K}}{273 \text{ K}} = 1.55 \text{ bar}.$$

Aus der Isentropengleichung $T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{konst}$ folgt dann

$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_2}{p_3} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = (423 \text{ K}) \left(\frac{1.55 \text{ bar}}{1 \text{ bar}} \right)^{\frac{1-1.4}{1.4}} = 373 \text{ K}.$$

(b) Berechnung der ausgetauschten Wärmen:

1 \rightarrow 2 (Isochore): Für ein ideales zweiatomiges Gas gilt $c_{mv} = f/2 R$, wobei $f = 5$.

$$Q_{12} = n c_{mv} (T_2 - T_1) = (1 \text{ mol}) \left(\frac{5}{2} \right) \left(8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right) (423 \text{ K} - 273 \text{ K}) = 3.12 \text{ kJ}$$

2 \rightarrow 3 (Isentrope): $Q_{23} = 0$

3 \rightarrow 4 (Isobare): Mit $c_{mp} = 7/2 R$ folgt

$$Q_{31} = n c_{mp} (T_1 - T_3) = (1 \text{ mol}) \left(\frac{7}{2} \right) \left(8.31 \frac{\text{J}}{\text{mol K}} \right) (273 \text{ K} - 373 \text{ K}) = - 2.91 \text{ kJ}.$$

(c) Somit ergibt sich der thermodynamische Wirkungsgrad η_{th} zu

$$\eta_{\text{th}} = 1 - \frac{|Q_{31}|}{|Q_{12}|} = 1 - \frac{2.91 \text{ kJ}}{3.12 \text{ kJ}} = 0.061,$$

also 6.1 %.

(d) Der Wirkungsgrad eines Carnotschen-Kreisprozesses zwischen T_2 und T_1

$$\eta_{\text{C}} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{273}{423} = 0.355,$$

wäre also mit 35.5 % deutlich höher.