Lösung zu Aufgabe 1

(a) Über den Rutschweg der beiden PKW läßt sich mit Hilfe des allgemeinen Energieerhaltungssatzes die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß berechnen, denn für beide PKW wird ihre jeweilige kinetische Energie E_{kin} in Reibungsarbeit W_R umgesetzt.

$$E_{kin} = W_R$$

$$\frac{1}{2} m\ v'^2 = F_R\ s,$$

wobei $F_R = \mu\ m\ g$ ist.

Daraus ergibt sich $v' = \sqrt{2\ \mu\ g\ s}$.

Zahlenwerte:

$$v'_1 = \sqrt{2\ (0.13)\ (9.81\ \text{m s}^{-2})\ (6.1\ \text{m})} = 3.94\ \text{m/s}$$

$$v'_2 = \sqrt{2\ (0.13)\ (9.81\ \text{m s}^{-2})\ (8.2\ \text{m})} = 4.57\ \text{m/s}$$

(b) In erster Näherung wirken beim Zusammenstoß nur innere Kräfte. Also ist p_{ges} = const. Die Aufprallgeschwindigkeit des Wagen 1 unmittelbar vor dem Stoß kann man deshalb über den Impulserhaltungssatz berechnen.

$$p_{ges}^{vorher} = p_{ges}^{nachher}$$

$$m_1\ v_1 = m_1\ v'_1 + m_2\ v'_2.$$

Daraus folgt

$$v_1 = v'_1 + \frac{m_2}{m_1} v'_2 = 3.94\ \text{m/s} + \frac{1100\ \text{kg}}{1400\ \text{kg}}\ 4.57\ \text{m/s}$$

$$v_1 = 7.53\ \text{m/s}.$$

(c) Der Energieverlust an mechanischen Energieformen bei diesem Unfall berechnet sich als Differenz der kinetischen Energien.

$$\Delta E = E_{kin}^{vorher} - E_{kin}^{nachher},$$

wobei wegen $v_2 = 0$

$$E_{kin}^{vorher} = \frac{1}{2} m_1\ v_1^2 = \frac{1}{2}\ (1400\ \text{kg})\ (7.53\ \text{m s}^{-1})^2 = 39.7\ \text{kJ und}$$

$$E_{kin}^{nachher} = \frac{1}{2} m_1\ v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2\ v_2'^2$$
$$= \frac{1}{2}\ (1400\ \text{kg})\ (3.94\ \text{m s}^{-1})^2 + \frac{1}{2}\ (1100\ \text{kg})\ (4.57\ \text{m s}^{-1})^2$$
$$= 10.9\ \text{kJ} + 11.5\ \text{kJ}$$
$$E_{kin}^{nachher} = 22.4\ \text{kJ}.$$

Somit ergibt sich das Verhältnis

$$\frac{\Delta E}{E_{kin}^{vorher}} = \frac{(39.7\ \text{kJ} - 22.4\ \text{kJ})}{39.7\ \text{kJ}} = 0.436 \mathrel{\hat{=}} 43.6\ \%.$$

Den maximal möglichen Energieverlust ΔE_{max} erhält man, wenn sich die beiden PKW ineinander verkeilen, also die gleiche Endgeschwindigkeit haben. Dies sieht man, wenn die kinetische Energie in folgender Form geschrieben wird.

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_1\, v_1^2 + \frac{1}{2} m_2\, v_2^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2)\ v_S^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1\ m_2}{(m_1 + m_2)}\ (v_1 - v_2)^2,$$

wobei v_S = Schwerpunktsgeschwindigkeit. Dann kann man ΔE_{max} über den Ausdruck

$$\Delta E_{max} = \frac{1}{2} \frac{m_1\ m_2}{(m_1 + m_2)}\ (v_1 - v_2)^2$$

berechnen. Da $v_2 = 0$, erhält man

$$\Delta E_{max} = \frac{1}{2} \frac{(1400\ \text{kg})\ (1100\ \text{kg})}{(1400\ \text{kg} + 1100\ \text{kg})}\ (7.53\ \text{m s}^{-1})^2 = 17.5\ \text{kJ}.$$

Mit $\frac{\Delta E_{max}}{E_{kin}^{vorher}} = \frac{17.5\ \text{kJ}}{39.7\ \text{kJ}} = 0.441$ entspricht dies einem maximalen Energieverlust von 44.1%. Dies bedeutet, dass der oben beschriebene Unfall fast einem vollkommen unelastischen Stoß entspricht.

Alternativ: Der relative Energieverlust beim vollkommen unelastischen Stoß $v_2 = 0$ läßt sich auch als Massenverhältnis darstellen.

$$\frac{\Delta E_{max}}{E_{kin}^{vorher}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{m_1\ m_2}{(m_1 + m_2)}\ v_1^2}{\frac{1}{2} m_1\ v_1^2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 0.44 \text{ berechnen.}$$

(a) Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Drehimpuls $\vec{L}$ sind wegen $\vec{L} = J\,\vec{\omega}$ parallel und zeigen in die negative z-Richtung. Der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus der Drehzahl zu $\omega_z = 2\,\pi\,n = \pi\,s^{-1}$.

(b) Da keine äußeren Momente wirken, bleibt der Drehimpuls des Systems erhalten. Er war vor Abfeuern der Kugel Null und er muss danach auch Null sein. Wegen des Vektorcharakters des Drehimpulses müssen die beiden Beträge gleich sein, die Richtungen aber einander entgegengesetzt.

Es ist $\vec{L}_{Kugel} = [\vec{r}\ \times\ \vec{p}_k] = m[\vec{r}\ \times\ \vec{v}_k]$ und $\vec{L}_{Scheibe} = J_z\,\vec{\omega}_z$.

Für die Beträge gilt $r\,m_k\,v_k = J_z\,\omega_z$ und somit

$$v_k = \frac{J_z\,\omega_z}{m_k\,r} = 209\ m\,s^{-1}.$$

(c) Das NEWTONsche Grundgesetz liefert für den Betrag der mittleren Kraft $\overline{F}$

$$\overline{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m_k\ v_k}{\Delta t} = 6.27 \cdot 10^3\ N$$

oder alternativ, weil eine <u>konstante Kraft</u> eine <u>konstante Beschleunigung</u> bewirkt

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} = \frac{m_k\ v_k}{\Delta t} = 6.27 \cdot 10^3\ N, \quad \text{weil} \quad \overline{a} = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = \frac{v_K - 0}{\Delta t}.$$

(d) 1. Lösungsweg: Mit der Definition der Winkelbeschleunigung wird

$$\overline{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\,\pi\,\Delta n}{\Delta t} = 2\,\pi\,\frac{1}{2}\,s^{-1}\,\frac{1}{2 \cdot 10^{-4}\,s} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^4\ s^{-2} = 1.57 \cdot 10^4\ s^{-2}.$$

Drehmomente bewirken Winkelbeschleunigungen gemäß

$$\overline{M} = J_z\,\overline{\alpha} = 2 \cdot 10^{-2} kgm^2\,\frac{\pi}{2} \cdot 10^4\,s^{-2} = \pi \cdot 10^2 Nm = 314\ N\,m.$$

2. Lösungsweg: Der Betrag eines Drehmoments ist definiert als

$$\overline{M} = \bar{r}\,F = 5 \cdot 10^{-2}\ m \cdot 6.27 \cdot 10^3\ N = 314\ N\,m.$$

Drehmomente bewirken Winkelbeschleunigungen gemäß

$$\overline{\alpha} = \frac{\overline{M}}{J_z} = \frac{314 Nm}{2 \cdot 10^{-2} kgm^2} = 1.57 \cdot 10^4\ s^{-2}.$$

a) Die Scheibe stellt ein physikalisches Pendel dar. Der Abstand $\overline{PS}$ zwischen Aufhängepunkt P und Schwerpunkt S ist gleich dem Radius R der Scheibe. Das Massenträgheitsmoment J_P berechnet sich nach dem STEINERschen Satz zu

$$J_P = J_S + m \cdot R^2 = \tfrac{3}{2} m R^2$$

Für die Eigenkreisfrequenz ω_0 eines physikalischen Pendels gilt bei kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage

$$\omega_0^{\,2} = \frac{m\,g\,(\overline{PS})}{J_P} \quad \text{oder}$$

$$T_0 = 2\,\pi \sqrt{\frac{J_P}{m\,g\,(\overline{PS})}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{3/2\,m\,R^2}{m\,g\,R}} = 2\,\pi \sqrt{\frac{3\,R}{2\,g}} = 0.777 \text{ s}$$

$$\text{und } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.777 \text{ s}} = 8.09 \text{ s}^{-1}.$$

b) Die gemessene Schwingungsdauer mit Dämpfung ist $T_d = 1.05\,T_0$.

Für die Kreisfrequenz mit Dämpfung gilt die Beziehung

$$\omega_d^{\,2} = \omega_0^{\,2}(1 - D^2) \quad \text{daraus wird}$$

$$D^2 = (1 - \frac{\omega_d^{\,2}}{\omega_0^{\,2}}) = (1 - \frac{T_0^{\,2}}{T_d^{\,2}}) = (1 - \frac{1.00^2}{1.05^2}) = (1. - 0.907) = 0.0930\,,$$

damit $D = 0.305$.

Die Abklingkonstante erhält man aus der Definition des Dämpfungsgrades D

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} \qquad \text{oder} \qquad \delta = D\,\omega_0 = 0.305 \cdot 8.09 \text{ s}^{-1} = 2.47 \text{ s}^{-1}.$$

c) Für die Schwingungsdauer um den Punkt A gilt - analog zu Teilaufgabe (a) für das Massenträgheitsmoment $J_A = \tfrac{1}{2} m R^2 + m x^2$ und für den Abstand

$$\overline{AS} = x, \text{ also } T_A^{\,2} = (2\pi)^2 \frac{(\tfrac{1}{2} m R^2 + m x^2)}{m g x} = (4\,\pi^2)[\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{g} \cdot R^2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{g} \cdot x].$$

Die Bestimmung der kürzesten Schwingungsdauer in Abhängigkeit von der Koordinate x des Aufhängepunkts A ist eine Extremwertaufgabe für $T_A(x)$ bzw. $T_A^{\,2}(x)$; denn wenn $T_A(x)$ dann hat auch $T_A^{\,2}(x)$ einen Extremwert.

Die erste Ableitung von $T_A{}^2(x)$ ist

$$\frac{d}{dt} T_A{}^2 = (4\pi^2)[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g}\cdot R^2\cdot\frac{(-1)}{x^2} + \frac{1}{g}]$$

Für die Bedingung 'Minimum' muß die eckige Klammer gleich Null werden, also gilt

$$\frac{R^2}{2g}\cdot\frac{1}{x_{min}{}^2} = \frac{1}{g} \quad \text{oder} \quad x_{min}{}^2 = \frac{1}{2} R^2 .$$

$$x_{min} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, R = 7.07 \text{ cm} .$$

Für die Schwingungsdauer $T_{A,min}$ wird

$$T_{A,min}{}^2 = (2\pi)^2 \frac{(\frac{1}{2}mR^2+mx^2)}{mgx}$$

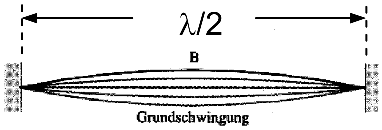
$$= (4\pi^2)\,[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{g}\cdot R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{R}+\frac{1}{g}\cdot\frac{R}{\sqrt{2}}] = (4\pi^2)[\sqrt{2}\cdot\frac{R}{g}] = 0.569 \text{ s}^2$$

$$T_{A,min} = 0.754 \text{ s} .$$

Lösung zu Aufgabe 4 **Physik-Prüfung SS99**

a) Die Frequenz der Grundschwingung wird über die Gleichung $f_0 = v/\lambda$ berechnet. Dabei ist v die Phasengeschwindigkeit und λ die Wellenlänge. Für die Grundschwingung sind die Einspannstellen Knoten. Dazwischen liegt ein Schwingungsbauch (siehe Skizze). Für die Wellenlänge folgt daraus

$$\frac{\lambda}{2} = L \quad \text{bzw.} \quad \lambda = 2\,L\,.$$



Die Phasengeschwindigkeit v für eine gespannte Saite ist $v = \sqrt{F/\mu}$,

wobei F die Saitenspannung und μ die Massenbelegung ist. Die Saitenspannung ergibt sich aus der Gewichtskraft der angehängten Masse m zu F = mg und die Massenbelegung berechnet sich aus Dichte ρ und Querschnitt A über $\mu = A\rho$. Damit ist

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{m\ g}{A\ \rho}} = \sqrt{\frac{(0.1\ \text{kg})\ (9.81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})}{(0.8\cdot 10^{-6}\ \text{m}^2)\ (0.95\cdot 10^{3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3})}} = 35.9\ \text{m/s}\,.$$

und

$$f_0 = \frac{v}{\lambda} = \frac{35.9\ \text{m/s}}{2\ (2\ \text{m})} = 8.98\ \text{Hz}\,.$$

b) Die Schwingungsmuster möglicher Resonanzfrequenzen sind in der Abbildung dargestellt. Die Frequenz der Grundschwingung (n=1, d.h. 1. Harmonische) beträgt $f_0 = v/(2L)$, die der ersten Oberschwingung (n=2, d.h. 2. Harmonischen) ist dann $f_1 = 2\ v/(2L)$. Die Rekursionsformel für die n-te Harmonische lautet deshalb

$$f_{n-1} = n\,\frac{v}{2\,L} \qquad \text{mit } n = 1, 2, 3,...$$

Aus der Gleichung $f_{n-1} = f_{max}$ ergibt sich

$$n = \frac{2\ L\ f_{max}}{v} = \frac{2\ (2\ \text{m})\ (50\ \text{s}^{-1})}{35.9\ \text{m/s}} = 5.57$$

Da aber n ganzzahlig sein muß, können bis zu einer Erregerfrequenz von f_{max} = 50 Hz maximal fünf Frequenzen angeregt werden. Es ist also möglich den Grundton und

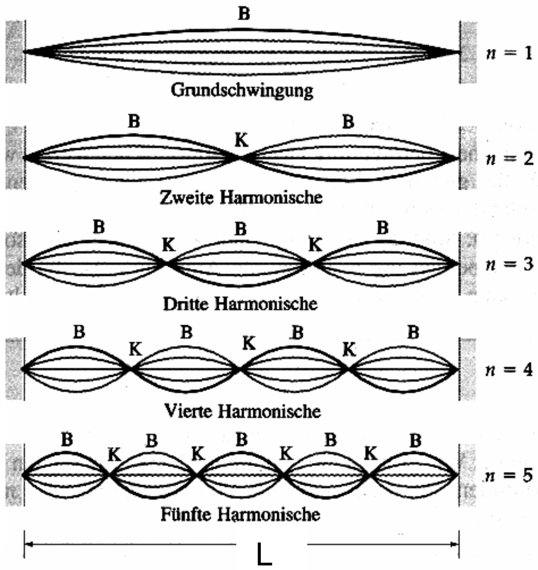


Abb.: B: Bauch, K: Knoten

vier Obertöne anzuregen..

Lösung zu Aufgabe 5 (nur für Studiengänge EE & VT) Physik-Prüfung SS99

a) Das Gas wird ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung komprimiert, so dass es sich hier um eine adiabatische Zustandsänderung handelt.

Die Adiabatengleichung $p\ V^{\gamma} = \text{const.}$ liefert dann

$$p_1\ V_1^{\gamma} = p_2\ V_2^{\gamma} \qquad \text{bzw.} \quad \frac{p_1}{p_2} = (\frac{V_2}{V_1})^{\gamma}$$

wobei γ = Isentropenexponent.

Somit ist

$$\gamma = \frac{\ln(p_1 / p_2)}{\ln(V_2 / V_1)} = \frac{\ln(1.22 / 21.9)}{\ln(1.36 / 10.7)} = 1.4\,.$$

Um welches Gas es sich hierbei handelt, lässt sich über die Anzahl f der Freiheitsgrade entscheiden. Für ein ideales Gas gilt:

$$\gamma = \frac{c_{mp}}{c_{mv}} = 1 + \frac{2}{f}\,.$$

Somit ergibt sich

$$f = \frac{2}{\gamma - 1} = \frac{2}{1.4 - 1} = 5\,.$$

Dies bedeutet, dass hier ein zweiatomiges Gas komprimiert wurde (3 Translationsfreiheitsgrade und 2 Rotationsfreiheitsgrade). Somit handelt es sich um Sauerstoff (0_2).

b) Die Endtemperatur in Punkt 2 berechnet sich aus einer alternativen Form der Adiabatengleichung

$$T_1\ V_1^{\gamma-1} = T_2\ V_2^{\gamma-1}.$$

Daraus folgt für die Temperatur T_2

$$T_2 = (\frac{V_1}{V_2})^{\gamma-1}\ T_1 = (\frac{10.7}{1.36})^{(1.4-1)}\ (250\ \text{K}) = 571\ \text{K}$$

Dies entspricht 298 °C.

c) Die mittlere kinetische Translationsenergie $< E_{kin}^{trans} >$ pro Teilchen berechnet sich jetzt aus dem Gleichverteilungssatz zu

$$< E_{kin}^{trans} > = \frac{3}{2} k \; T .$$

Daraus folgt die mittlere kinetische Translationsenergie pro Mol vor der Kompression

$$< E_{kin,\; vorher}^{trans} > = N_A \frac{3}{2} k \; T_1 = \frac{3}{2} R \; T_1$$

$$= \frac{3}{2} (8.31 \; J \; mol^{-1} \; K^{-1}) \; (250 \; K) = 3.12 \; kJ / mol$$

und nach der Kompression

$$< E_{kin,\; nachher}^{trans} > = \frac{3}{2} R \; T_2 = 7.12 \; kJ / mol .$$

d) Die mittlere kinetische Translationsenergie ist aber definiert über

$$< E_{kin}^{trans} > = \frac{1}{2} m < v^2 > ,$$

so dass die mittlere Geschwindigkeit $v_m = \sqrt{< v^2 >}$ folgendermaßen berechnet werden kann

$$v_m = \sqrt{\frac{2 < E_{kin}^{trans} >}{m}} .$$

Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeiten vor und nach der Kompression ergibt sich somit zu

$$\frac{v_{m,\; vorher}}{v_{m,\; nachher}} = \sqrt{\frac{< E_{kin,\; vorher}^{trans} >}{< E_{kin,\; nachher}^{trans} >}} = \sqrt{\frac{3.11 \; kJ}{7.12 \; kJ}} = 0.661.$$