Lösung zu Aufgabe 1 (Studiengänge FZ & MB) Physik-Prüfung - WS 98/99

(a) Die Federkonstante errechnet sich nach der angegebenen Beziehung zu

$$c = \frac{G\ d^4}{8\ n\ D^3} = \frac{81 \cdot 10^9 N}{m^2} \cdot \frac{10^{-12} m^4}{8 \cdot 150 \cdot 27 \cdot 10^{-6} m^3} = 2.50\ Nm^{-1}$$

(b) Für eine physikalische Größe, die einem reinen Potenzgesetz folgt, liefert das Fehlerfortpflanzungsgesetz für den relativen Größtfehler:

$$\frac{\Delta c}{c} = \left|\frac{\Delta G}{G}\right| + 4 \left|\frac{\Delta d}{d}\right| + 3 \cdot \left|\frac{\Delta D}{D}\right| + \left|\frac{\Delta n}{n}\right|$$

$$= \frac{2}{81} + 4 \cdot \frac{2 \cdot 10^{-2}}{1.00} + 3 \cdot \frac{10^{-1}}{30} + \frac{1}{150} = 0.025 + 0.080 + 0.010 + 0.007$$

$$= 0.122 \mathrel{\hat{=}} 12.2\%$$

(c) Mit den Ergebnissen der Teilaufgaben (a) und (b)

$$c = 2.50\ Nm^{-1} \text{ und } \frac{\Delta c}{c} = 0.122$$

ergibt sich der absolute Größtfehler

$$\Delta c = 0.122 \cdot 2.50\ Nm^{-1} = 0.31\ Nm^{-1}$$

(d) Damit stellt sich das Endergebnis dar als

$$c = (2.50 \pm 0.31)\ N\,m^{-1} \quad \text{oder als} \quad c = 2.50\ N\,m^{-1}\,(1 \pm 12.2\,\%)$$

Versuch A:

(a1) Der Drehimpuls des Gesamtsystems (Ball & Tür) bleibt bezüglich des Drehpunktes A erhalten, weil keine <u>äuß</u>eren Drehmomente wirken.

$\vec{M}_{äuß} = \sum_i \vec{M}_{i,äuß} = 0$. Wegen $\vec{M}_{äuß} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ ist $\vec{L} = const$.

(Hinweis: Die Lagerkraft bewirkt kein Drehmoment, weil ihre Wirkungslinie durch den Drehpunkt A geht!)

<u>Bemerkung:</u> Der lineare Impulserhaltungssatz darf nicht angewandt werden, denn $\vec{F}_{äuß} = \sum_i \vec{F}_{i,äuß} \neq 0$ (Dafür ist die Lagerkraft während des Stoßes verantwortlich). Mit $\vec{F}_{äuß} = \frac{d\,\vec{p}_{ges}}{dt}$ folgt $\vec{p}_{ges} \neq const$.

(a2) Ein geradeaus fliegender Körper hat bezüglich eines Punktes, der nicht auf seiner Bahn liegt, einen Drehimpuls, der definiert ist als

$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$. Er hat den Betrag $|\vec{L}| = |[\vec{r} \times \vec{p}]| = d\,m\,v\,\sin(\vec{r},\vec{p})$.

Für senkrechten Aufprall ist der Winkel zwischen Radiusvektor $\vec{r}$ und Geschwindikeitsvektor $\vec{v}$ aber 90^0 und damit der Wert der Sinusfunktion 1.
Der Drehimpuls der Tür bezüglich des Drehpunkts A ist $\vec{L} = J_A\,\vec{\omega}$.
Das Massenträgheitsmoment der Tür bezüglich des Drehpunkts A berechnet sich nach dem Satz von STEINER zu

$$J_A = J_S + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m\,b^2 + m\,\frac{b^2}{4} = \frac{1}{3} m\,b^2 = \frac{1}{3}(35\text{ kg})\,(0.73\text{ m})^2 = 6.22\text{ kg m}^2$$

Betrag des Drehimpulses des Balles vor dem Aufprall	$L^{Ball}_{vor} = m_1 v_1 d$
Betrag des Drehimpulses des Balles nach dem Aufprall	$L^{Ball}_{nach} = m_1 v'_1 d$
Betrag des Drehimpulses der Tür vor dem Aufprall	$L^{Tür}_{vor} = 0$
Betrag des Drehimpulses der Tür vor nach Aufprall	$L^{Tür}_{nach} = J_A\,\omega_A$

Die Drehimpulsrichtung des auftreffenden Balles sei positiv. Dann gilt

$$m_1\,v_1\,d = J_A\omega_A - m_1\,v'_1\,d.$$

Somit

$$\omega_A = \frac{m_1 \, d \, (v_1 + v_1')}{J_A} = \frac{(1.1\,\text{kg})\,(0.62\,\text{m})\,(27\,\text{m}\,\text{s}^{-1} + 16\,\text{m}\,\text{s}^{-1})}{6.22\,\text{kg}\,\text{m}^2} = 4.72\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

(a3) Zur Beurteilung muß man die kinetischen Energien vor und nach dem Aufprall miteinander vergleichen.

$$E_{kin}^{vor} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} (1.1\,\text{kg})\,(27\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 401\,\text{J}$$

$$E_{kin}^{nach} = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} J_A \, \omega_A^2$$

$$= \frac{1}{2} (1.1\,\text{kg})\,(16\,\text{m}\,\text{s}^{-1})^2 + \frac{1}{2} (6.22\,\text{kg}\,\text{m}^2)\,(4.72\,\text{s}^{-1})^2 = 210\,\text{J}$$

Die kinetische Energie nach dem Stoß ist kleiner als die vor dem Stoß. Die Differenz wurde in nicht-mechanische Energieformen umgewandelt. Es handelt sich hier also um einen teilweise elastischen Stoß.

Versuch B:

(b) Die Bedingung ‘es wirken keine äußeren Drehmomente’ ist wieder erfüllt $\vec{L}_{vorh} = \vec{L}_{nach}$. Wegen des schrägen Einfalls ist jedoch der Winkel zwischen Radiusvektor $\vec{r}$ und Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ zu berücksichtigen (vgl. Skizze).

$$L_v = d \, m_1 \, v_1 \, \sin(\vec{d}, \vec{v}_1) = d \, m_1 \, v_1 \, \sin(90^\circ - \varphi).$$

Somit ergibt sich

$$m_1 \, v_1 \, d \, \sin(90^0 - \varphi) = J_{ges}^{nach} \, \omega_A$$

$$\omega_A = \frac{m_1 \, v_1 \, d \, \sin(90^0 - \varphi)}{J_{ges}^{nach}} \quad .$$

Nach dem Aufprall berechnet sich das Massenträgheitsmoment als Summe des Massenträgheitsmoments der Tür und das des (punktförmigen) Balls zu

$$J_{ges}^{nach} = J_A + m_1 \, d^2 = 6.22\,\text{kg}\,\text{m}^2 + (1.1\,\text{kg})\,(0.62\,\text{m})^2 = 6.64\,\text{kg}\,\text{m}^2.$$

Damit ist

$$\omega_A = \frac{(1.1\,\text{kg})\,(27\,\text{m}\,\text{s}^{-1})\,(0.62\,\text{m})\,(0.940)}{6.64\,\text{kg}\,\text{m}^2} = 2.61\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}.$$

Hinweis: Beim vollständig inelastischen Stoß ist der Verlust an kinetischer Energie maximal.

(a) Für die ungedämpften Schwingungen eines Feder-Masse-Systems gilt für die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{c}}$$

Dabei ist M die angehängten Masse und c die Federkonstante der (linearen) Federcharakteristik.

Für die beiden Schwingungsversuche gilt somit (Index ‘S’ Sitz & ‘A’ Astronaut)

$$T_{0,S} = 2\pi\sqrt{\frac{m_S}{c}} \qquad \text{bzw.} \qquad T_{0,S+A} = 2\pi\sqrt{\frac{(m_S + m_A)}{c}}$$

Mit dem ersten Schwingungsversuch wird die Feder geeicht.

$$c = 4\pi^2 \frac{m_S}{T_{0,S}{}^2} = 4\pi^2 \frac{12.5\text{kg}}{(0.35\ \text{s})^2} = 4.03 \cdot 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Man braucht dabei die Federkonstante aus der ersten Gleichung gar nichr explizit auszurechen. Da die Feder für beide Versuche die gleiche ist fällt bei Division die Federkonstante heraus und nach Quadrieren erhält man

$$\frac{(m_S + m_A)}{m_S} = \frac{(T_{0,S+A})^2}{(T_{0,S})^2}$$

$$m_A = \left\{\frac{(T_{0,S+A})^2}{(T_{0,S})^2} - 1\right\} m_S = \left\{\frac{(0.90\ \text{s})^2}{(0.35\ \text{s})^2} - 1\right\} 12.5\ \text{kg}$$

$$m_A = \{6.61 - 1\}\ 12.5\ \text{kg} = 70.2\ \text{kg}$$

(b) Die aufgewandte Arbeit W wird in potentielle Energie der Feder und in kinetische Energie des schwingenden Systems (Astronaut + Sitz) umgesetzt. Im Umkehrpunkt, also bei Maximalauslenkung, ist nur die potentielle Energie der Feder zu berücksichtigen. Diese hängt quadratisch von der Auslenkung ab, also ergibt sich für die Amplitude $\hat{y}$

$$W = E_{pot}^{Feder} = \frac{1}{2} c\hat{y}^2 = \frac{1}{2} 4.03 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 10^{-2}\text{m}^2 = 20.2\ \text{J}$$

(c) Variante 1: Beim Nulldurchgang der Schwingung ist die potentielle Energie der Feder Null und die Gesamtenergie wird durch die kinetische Energie der schwingenden Massen repräsentiert.

$$W = E_{pot}^{Feder}(max) = E_{kin}^{Masse}(max) = \frac{1}{2}(m_S + m_A) v_{max}^2$$

$$v_{max}^2 = \frac{2W}{(m_S + m_A)} = \frac{2 \cdot 20.2\,Nm}{82.7\,kg} = 0.489\ m^2 s^{-2}$$

$$v_{max} = 0.70\,ms^{-1}$$

Variante 2: Das Weg,Zeit-Gesetz einer ungedämpften harmonischen Schwingung läßt sich durch eine Sinus- oder eine Cosinus-Schwingung darstellen. Die Geschwindigkeit erhält man als erste Ableitung dieser Funktion, also z.B. für eine Darstellung als Kosinus-Funktion

$$y(t) = \hat{y}\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\dot{y}(t) = -\hat{y}\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{0.90\,s} = 7.0\ s^{-1}$ und $\hat{y} = 10\ cm$

Da harmonische Funktionen maximal den Wert 1 annehmen können, ist der Vorfaktor im Geschwindigkeit,Zeit-Gesetz die maximale auftretende Geschwindigkeit v_{max}, also

$$v_{max} = \hat{y}\,\omega_0 = 10^{-1}\,m\ 6.98\ s^{-1} = 0.70\ m\,s^{-1}$$

(d) die Abnahme der Auslenkungen wird für viskose Reibung durch eine Exponentialfunktion als Einhüllende beschrieben

$$y_{Einh}(t) = \hat{y}_0\, e^{-\delta t} \quad \text{oder} \quad \frac{y_{Einh}(t)}{\hat{y}_0} = e^{-\delta t} \quad \text{also} \quad \ln\left(\frac{y_{Einh}(t)}{\hat{y}_0}\right) = -\delta t$$

Der Dämpfungsgrad ist definiert als $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \delta\,\frac{T_0}{2\pi}$.

Unter der Annahme $D \ll 1$ wird mit $T_d \approx T_0$ für das Zeitintervall $t = 10\,T_0$

das Verhältinis der Auslenkungen $\frac{y_{Einh}(t)}{\hat{y}_0} = \frac{2}{3}$

und damit

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \delta\frac{T_0}{2\pi} = \frac{-\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{10 \cdot T_0} \cdot \frac{T_0}{2\pi} = 0.0065$$

Damit ist die gemachte Annahme einer ‘schwachen Dämpfung’, also $D \leq 0.1$, erfüllt.

(a) Für eine Euro-Normbiene gilt für den Schallintensitätspegel

$$L_{norm} = 10\text{ dB} = 10\lg\frac{I_{norm}}{I_0}.$$

Mit der Vergleichsintenstität $I_0 = 10^{-12}\ \text{Watt m}^{-2}$ (Hörschwelle)
wird $I_{norm} = 10^{-11}\ \text{Watt m}^{-2}$.

Für die Intensität des (virtuellen) Staubsaugers ergibt sich entsprechend

$$L_{StS} = 70\text{ dB} = 10\lg\frac{I_{StS}}{I_0}$$

also $I_{StS} = 10^{-5}\ \text{Watt m}^{-2}$.

Diese Intensität muß von N Normbienen aufgebracht - oder ersummt - werden. Intensitäten sind additiv, also

$$I_{StS} = N \cdot I_{norm} \qquad \text{also}$$

$$N = \frac{I_{StS}}{I_{norm}} = \frac{10^{-5}\ \text{Watt m}^{-2}}{10^{-11}\ \text{Watt m}^{-2}} = 10^6\ \text{Bienen}.$$

(b) Der Schallintensitätspegel läßt sich unter der Annahme einer punktförmigen Schallquelle angeben. Die Oberfläche einer Kugel nimmt mit dem Quadrat des Radius zu, die Intensität muß also umgekehrt zum Quadrat des Abstandes abnehmen. Der Abstand wird verzehnfacht, also nimmt die Intensität auf ein Hundertstel ab:

Mit $I(5\text{ m}) = 10^{-5}\ \text{Watt m}^{-2}$ wird $I(50\text{ m}) = 10^{-7}\ \text{Watt m}^{-2}$

$$L(50\text{m}) = 10\cdot\lg\frac{I(50\text{m})}{I_0} = \frac{10^{-7}\ \text{Watt m}^{-2}}{10^{-12}\ \text{Watt m}^{-2}} = 50\text{ dB}.$$

Schallintenistätspegel L(50 m) = 50 dB.

Anmerkung: Die Bienenvollversammlung muß nicht punktförmig sein. Es genügt, wenn alle Bienen die gleichen Abstände vom Zuhörer haben.