Lösung zu Aufgabe 1

a) Bei Vernachlässigung aller Reibungskräfte wird die potentielle Energie der Kugel ‘1’ im Startpunkt vollständig in kinetische Energie im tiefsten Punkt der Bahn umgewandelt. Der Energieerhaltungssatz liefert

$$m_1 \; g \; h = \frac{1}{2} \; m_1 \; v_1^2 ,$$

wobei sich die Höhe h aus der Geometrie ergibt.

$$h_1 = L - L \cos\beta = L \; (1 - \cos\beta)$$

Somit folgt für die Geschwindigkeit der Kugel ‘1’ unmittelbar vor dem Stoß

$$v_1 = \sqrt{2 \; g \; h_1} = \sqrt{2 \; g \; L \; (1 - \cos\beta)}$$

$$= \sqrt{2 \; (9.81 \; m \; s^{-2}) \; (0.5 \; m) \; (1 - \cos 45^\circ)}$$

$$v_1 = 1.70 \; m \; s^{-1}.$$

b) Beim elastischen Stoß zweier Kugeln gilt sowohl der Impulserhaltungssatz, als auch der Energieerhaltungssatz, also

$$m_1 \, v_1 + m_2 \, v_2 = m_1 \, v_1' + m_2 \, v_1' \qquad \text{(IES)}$$

$$\frac{1}{2} \; m_1 \; v_1^2 + \frac{1}{2} \; m_2 \; v_2^2 = \frac{1}{2} \; m_1 \; v_1'^2 + \frac{1}{2} \; m_2 \; v_2'^2 \qquad \text{(EES).}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt allgemein

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \; v_1 + 2 \; m_2 \; v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{und} \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \; v_2 + 2 \; m_1 \; v_1}{m_1 + m_2}.$$

Für den Sonderfall $v_2 = 0$ gilt somit

$$v_2' = \frac{2 \; m_1}{m_1 + m_2} \, v_1 = \frac{2 \; (0.1 \; kg)}{(0.1 \; kg + 0.3 \; kg)} \; 1.70 \; m \; s^{-1}$$

$$v_2' = 0.850 \; m \; s^{-1}.$$

Aus dem Energieerhaltungssatz erhält man die Steighöhe h_2 der zweiten Kugel.

$$\frac{1}{2} \; m_2 \; v_2'^2 = m_2 \; g \; h_2$$

$$h_2 = \frac{v_2'^2}{2 \; g} = \frac{(0.850 \; m \; s^{-1})^2}{2 \; (9.81 \; m \; s^{-2})}$$

$$h_2 = 0.0368 \; m$$

Lösung zu Aufgabe 1 (Fortsetzung)

c) Bei einem unelastischen Stoß haben beide Kugeln nach dem Stoßvorgang dieselbe Geschwindigkeit $v_1' = v_2' = v_E$. Sie ergibt sich aus dem Impulserhaltungssatz.

$$m_1 \; v_1 = (m_1 + m_2) \; v_E ,$$

also

$$v_E = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \; v_1 = \frac{0.1 \text{ kg}}{0.1 \text{ kg} + 0.3 \text{ kg}} \, 1.70 \text{ m s}^{-1}$$

$$v_E = 0.425 \text{ m s}^{-1}.$$

Alternative: Die gemeinsame Geschwindigkeit v_E nach dem Stoß ist gleich der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S. Diese aber ändert sich während des Stoßvorgangs nicht. Dadurch läßt sich v_E auch aus der Schwerpunktsgeschwindigkeit vor dem Stoß berechnen.

$$v_E = v_S = \frac{m_1 \; v_1 + m_2 \; v_2}{(m_1 + m_2)} = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} \; v_1 ,$$

da $v_2 = 0$.

Das Verhältnis zwischen kinetischer Energie vor, bzw. nach dem Stoß ergibt

$$\frac{E_{kin}^{n}}{E_{kin}^{v}} = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \; v_E^2}{\frac{1}{2} m_1 \; v_1^2} = \frac{\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \; \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \; v_1^2}{\frac{1}{2} m_1 \; v_1^2}$$

$$= \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1}{4}$$

Somit ist der Anteil p des Energieverlusts

$$p = 0.75 .$$

Dies bedeutet, daß 75% der Anfangsenergie von Kugel ‘1’ in nicht-mechanische Energieformen umgesetzt werden.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Es werde die Indizierung ‘A’ für den Anfangszustand und ‘E’ für den Endzustand gewählt.

Der Momentenstoß $\int$ Mdt ist gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses L. Das Zeitintegral des äußeren Moments wird durch die Fläche des Trapezes *‘unter der Kurve M(t)’* repräsentiert (geometrisch also durch ein Trapez bzw. durch zwei Dreiecke und ein Rechteck), also

$$\Delta L = \int_0^{10\,s} M\,dt = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\,N\,m\cdot 4\,s + 4\,N\cdot 2\,s = 24.0\ N\,m\,s$$

b) Anfangsdrehimpuls $L_A = J_S\,\omega_A = 12.0\ kg\ m^2\cdot 2\ s^{-1} = 24.0\ N\ m\ s$

$$\left|\Delta\vec{L}\right| = \left|\vec{L}_E\right| - \left|\vec{L}_A\right|$$

$$L_E = L_A + \Delta L = (24.0 + 24.0)\ N\ m\,s = 48.0\ N\ m\ s$$

Die Verknüpfung zwischen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit liefert

$$L_E = J_S\ \omega_E$$

$$\omega_E = \frac{48.0\ \ kg\ m^2\ s^{-1}}{12.0\ \ kg\ m^2} = 4.0\ s^{-1}$$

c) Für ein zeitlich konstantes Moment wird die Fläche durch ein Rechteck repräsentiert. Es muß gelten

$\overline{M}\ \Delta t = 24.0$ N m s, also wegen $\Delta t = 10$ s schließlich $\overline{M} = 2.4$ N m.

d) Arbeit - Energie - Theorem: Die zugeführte Arbeit ist gleich der Zunahme der kinetischen Energie der Rotation des Körpers.

$$W_{AE} = E_{kin}(E) - E_{kin}(A) = \frac{1}{2} J_S\,(\omega_E{}^2 - \omega_A{}^2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 12.0\ kg\,m^2\,(4.0^2 - 2.0^2)\,s^{-2} = 72.0\ N\,m$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die Scheibe ohne Stab muß als physikalisches Pendel betrachtet werden. Der Satz von STEINER liefert das Massenträgheitsmoment J_A der Scheibe bezüglich des Drehpunkts A.

$$J_A = J_{Sch}(S) + m_{Sch}\ L^2 = \frac{1}{2} m_{Sch}\ R^2 + m_{Sch}\ L^2$$
$$= \frac{1}{2}(0.2\ \text{kg})\ (0.03\ \text{m})^2 + (0.2\ \text{kg})\ (0.5\ \text{m})^2$$
$$= 0.009 \times 10^{-2}\ \text{kg m}^2 + 5.00 \times 10^{-2}\ \text{kg m}^2$$
$$J_A \approx 0.05009\ \text{kg m}^2$$

Bereits hier erkennt man am kleinen Beitrag von $J_{Sch}(S)$, daß die Scheibe alleine auch gut als mathematisches Pendel betrachtet werden kann.

Für die Schwingungsdauer des physikalischen Pendels folgt

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{m\ g\ L}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.05009\ \text{kg m}^2}{(0.2\ \text{kg})\ (9.81\ \text{m s}^{-1})\ (0.5\ \text{m})^2}} = 1.42\ \text{s},$$

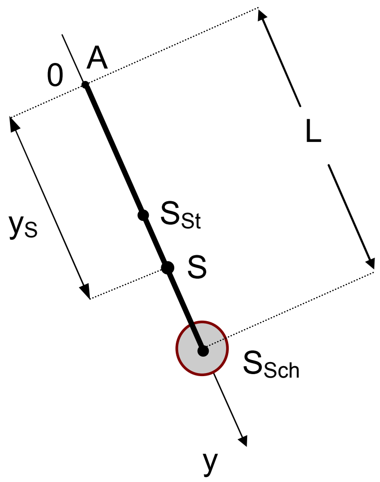
wobei $L = \overline{AS}$ der Abstand des Schwerpunkts vom Drehpunkt ist.

Bemerkung: Für ein mathematisches Pendel ist die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.5\ \text{m}}{9.81\ \text{m s}^{-1}}} = 1.42\ \text{s}.$$

Es bestätigt sich, daß in diesem Fall die Scheibe (ohne Stab) mit guter Näherung auch als mathematisches Pendel betrachtet werden kann.

b) Um die Schwingungsdauer des Gesamtsystems aus Scheibe und Stab berechnen zu können, benötigt man den Abstand y_S des gemeinsamen Schwerpunkts vom Drehpunkt A und das neue Massenträgheitsmoment J'_A.



Die Schwerpunktskoordinate y_S berechnet sich folgendermaßen:

$$y_S = \frac{m_{St}\frac{L}{2} + m_{Sch}L}{m_{St} + m_{Sch}}$$
$$= \frac{(0.3\ \text{kg})\ (\frac{0.5\ \text{m}}{2}) + (0.2\ \text{kg})\ (0.5\ \text{m})}{0.2\ \text{kg} + 0.3\ \text{kg}}$$
$$y_S = 0.35\ \text{m}$$

Lösung zu Aufgabe 3 (Fortsetzung)

Das Massenträgheitsmoment J'_A für die Anordnung aus Scheibe und Stab ist

$$J'_A = J_{St} + J_{Sch},$$

wobei mit dem Satz von STEINER

$$J_{St} = J_{St}(S) + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m_{St} L^2 + m \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_{St} L^2$$

$$J_{St} = \frac{1}{3} (0.3 \text{ kg}) (0.5 \text{ m})^2 = 0.0250 \text{ kg m}^2.$$

Mit dem Massenträgheitsmoment der Scheibe $J_{sch} = 0.0509$ kg m^2 aus Teilaufgabe a) folgt

$$J'_A = 0.0250 \text{ kg m}^2 + 0.0509 \text{ kg m}^2 = 0.0759 \text{ kg m}^2.$$

Für ein physikalisches Pendel (Scheibe und Stab) ergibt sich die Schwingungsdauer

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J'_A}{m \; g \; y_S}} = 2\pi \sqrt{\frac{0.0759 \text{ kg m}^2}{(0.2 \text{ kg} + 0.3 \text{ kg}) (9.81 \text{ m s}^{-2}) (0.35 \text{ m})^2}}$$

$$T_0 = 1.32 \text{ s}.$$

c) Die prozentuale Abweichung der in a) berechneten genäherten Schwingungsdauer T_{0a} im Vergleich zu T_{0b} beträgt

$$\frac{\Delta T}{T_{0b}} = \frac{T_{0b} - T_{0a}}{T_{0b}} = \frac{1.42 \text{ s} - 1.32 \text{ s}}{1.32 \text{ s}} = 0.076.$$

Dies entspricht einer Abweichung von 7.6 %.

Lösung zu Aufgabe 4

Für die Einhüllende einer abklingenden Schwingung gilt

$$\frac{\beta(t)}{\hat{\beta}_0} = e^{-\delta\ t}.$$

Der Dämpfungsgrad ist definiert als $D = \dfrac{\delta}{\omega_0}$.

D = 0.02 entspricht schwacher Dämpfung, also ist die Näherung $T_d \approx T_0$ erlaubt, denn $\omega_d{}^2 = \omega_0{}^2\ (1 - D^2)$.

Mit $\omega_0 = \dfrac{2\ \pi}{T_0} = \dfrac{2\ \pi}{2\ s} = \pi\ s^{-1}$

erhält man für den Abklingkoeffizienten $\delta = D\ \ \omega_0 = \dfrac{\pi}{50}\ s^{-1}$.

Nach N = 10 vollen Schwingungen des Systems ist die Zeit $t = N\ T_0$ verstrichen.
Für das Verhältnis der Auslenkungen erhält man also

$$p = \frac{\beta(t)}{\hat{\beta}_0} = e^{-\delta\ t} = e^{-\frac{\pi}{50}\ s^{-1}\ 20\ s} = 0.285$$

Lösung zu Aufgabe 5

Die Phasengeschwindigkeit einer Transversalwelle einer gespannten Saite hängt von der Spannkraft und der Massenbelegung ab.

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad \text{dabei ist die Massenbelegung} \quad \mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho\ A\ L}{L} = \rho\ A$$

a) Da die Massenbelegung sich nicht ändert, erhält man sofort das Verhältnis

$$\frac{c_2}{c_1} = \sqrt{\frac{F_2}{F_1}} \quad \text{oder}$$

$$F_2 = \frac{{c_2}^2}{{c_1}^2}\ F_1 = \frac{30^2\ m^2\ s^{-2}}{20^2\ m^2\ s^{-2}}\ 6.0\ \ N = \frac{9}{4}\ 6.0\ \ N = 13.5\ N$$

b) Das Produkt aus Wellenlänge λ und Frequenz f ist gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Für die Grundschwingung gilt: die Länge der Saite ist gleich der halben Wellenlänge. Mit

$$\lambda\ f_1 = c_1 \quad \text{und} \quad L = \frac{\lambda}{2} \quad \text{wird}$$

$$f_1 = \frac{c_1}{2\ L} = \frac{20\ m\ s^{-1}}{0.4\ \ m} = 50\ s^{-1} = 50\ Hz$$

c) Eine Saite mit halbiertem Durchmesser hat nur noch ein Viertel des ursprünglichen Volumens oder der ursprünglichen Masse. Die Massenbelegung ist damit bei ungeänderter Länge ebenfalls ein Viertel und - wegen der Quadratwurzel - verdoppelt sich bei gleicher Spannkraft die Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Die zugehörige Frequenz f_3 ist damit auch doppelt so groß wie f_1 also
f_3 = 100 Hz.

Lösung zu Aufgabe 6 (Fortsetzung)

a) Die Zustandsgleichung idealer Gase für den Zustand '1' liefert die Teilchenmenge

$$n = \frac{p_1 \; V_1}{R_m \; T_1} = \frac{10^5 \; N \cdot 2 \cdot 10^{-3} \; m^3}{m^2 \left(8.31 \; N \; m \; mol^{-1} \; K^{-1}\right) 293 \; K} = 0.082 \; mol .$$

b) Für die isobare Zustandsänderung von '1' → '2' gilt

$$T_2 = \frac{V_2}{V_1} \; T_1 = \frac{0.5 \; l}{2.0 \; l} \cdot 293K$$

$$T_2 = 73.3 \; K \; .$$

Mit der isentropen Zustandsänderung von '3' → '1' und $\kappa(He) = \frac{5}{3}$ (einatomiges Gas) folgt

$$T_3 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa - 1} \cdot T_1 = 4^{0.67} \; 293 \; K$$

$$T_3 = 738 \; K \; .$$

c) Bei diesem Kreisprozeß wird nur Q_{23} zugeführt.
$Q_{31} = 0$ (isentrope Expansion)
$Q_{12} < 0$ (isobare Kompression mit $\Delta V_{12} < 0$ und $\Delta U_{12} < 0$)

Für eine isochore Zustandsänderung ($W_{23} = 0$) liefert der erste Hauptsatz

$\Delta U_{23} = Q_{23} + W_{23}$, sofort

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = n \; C_{mv}(He) \; \left(T_3 - T_2\right) \quad ,$$

wobei $C_{mv}(He) = \frac{3}{2} \; R_m$.

Somit ist $Q_{zu} = Q_{23}$ oder

$$Q_{zu} = 0.082 \; mol \; \frac{3}{2} \; 8.31 \; J \; mol^{-1} \; K^{-1} \; (664.7 \; K)$$

$$Q_{zu} = 680 \; J$$

d) Es ist

$$W_{12} = -p_1 \int_{V_1}^{V_2} d \; V = -p_1 \; \left(V_2 - V_1\right)$$

$$= -\left(10^5 \; N \, m^{-2}\right) (0.5 - 2.0) \, 10^{-3} \; m^3$$

$$W_{12} = 150 \; J ,$$

Lösung zu Aufgabe 6 (Fortsetzung)

$$W_{23} = 0 \text{ J} \quad (\text{isochore Zustandsänderung mit } \Delta V_{23} = 0)$$

und

$$W_{31} = \Delta U_{31} = n \; C_{mv}(\text{He}) \left(T_1 - T_3\right)$$
$$= 0.082 \text{ mol } \frac{3}{2} \; 8.31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \; (- \; 445 \text{ K})$$
$$W_{31} = - \; 455 \text{ J} \quad (\text{isentrope Zustandsänderung mit } \Delta Q_{31} = 0).$$

Somit ergibt sich für die mechanische Nutzarbeit

$$W = W_{12} + W_{23} + W_{31}$$
$$= \left(150 + 0 - 455\right) \text{ J}$$
$$W = - \; 305 \text{ J}.$$

Dies bestätigt nochmals, daß bei einem rechtsläufigen Kreisprozeß insgesamt Arbeit abgegeben wird.

e) Der Wirkungsgrad η dieser Wärmekraftmaschine ist

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{23}|} = \frac{305\text{J}}{680\text{J}} = 0.45 \qquad (\text{oder } 45\ \%).$$