Lösungshinweise zu Aufgaben der Wellenlehre für IT

1. a) $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1980\,\mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = 315{,}1\,\mathrm{Hz}$,

   b) Wellenzahl: $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = 6\,\mathrm{m}^{-1}$, Wellenlänge: $\lambda = 1{,}05$ m,

   c) Schallgeschwindigkeit $c = \dfrac{\omega}{k} = \lambda f = 330\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$,

   d) am festen Ort, z.B. $x = 0$ gilt: $y = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}\cdot\sin(1980\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t)$,
   $\dot{y} = v = 5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}\cdot 1980\,\mathrm{s}^{-1}\cdot\cos(1980\,\mathrm{s}^{-1}\cdot t)$, $\hat{v} = 5\cdot 10^{-5}\mathrm{m}\cdot 1980\,\mathrm{s}^{-1} = \;9{,}9\;\mathrm{cm/s}$.

   e) Intensität: $I = c\omega = \dfrac{1}{2}c\rho\hat{y}^2\omega^2 = 2{,}09\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$, Pegel: $L = 10\lg\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ dB = 123 dB.

2. $y(x,t) = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \;)$, $\hat{y} = 5\,\mathrm{cm}$, $k = 2\pi\ \mathrm{m}^{-1}$, $\omega = 60\ \pi\ \mathrm{s}^{-1}$;
   die Anfangsbedingungen $y(0{,}0) = 0$ und $\dot{y}(0{,}0) > 0$ liefern $\varphi = -\pi/2$.
   Komplette Lösung: $y(x,t) = 5\mathrm{cm}\cdot\sin\left[2\pi(30\mathrm{s}^{-1}\cdot t\ -\ 1\mathrm{m}^{-1}\cdot x)\right]$, Frequenz $f = 30$ Hz.

3. Am festen Ort gilt für die Schwingung:
   $y(t) = \hat{y}\cos(\omega t + \;)$, $\hat{v} = \omega\hat{y} = 0{,}0314\,\mathrm{m/s}$, $\hat{a} = \omega^2\hat{y} = 9870\,\mathrm{m/s^2} = 1006\cdot g$

4. I_1 ist Intensität eines Bläsers; $I_4 = 4I_1$ die Intensität von vier Bläsern;
   $L_1 = 10\cdot\lg\dfrac{I_1}{I_0}\,\mathrm{dB}$;
   $L_4 = 10\cdot\lg\dfrac{I_4}{I_0}\,\mathrm{dB} = 10\cdot\lg 4\mathrm{dB} + 10\cdot\lg\dfrac{I_1}{I_0}\,\mathrm{dB} = 10\cdot\lg 4\mathrm{dB} + L_1$.
   $\Delta L = L_4 - L_1 = 6\,\mathrm{dB}$.

5. a) $L_1 = 10\cdot\lg\dfrac{I_1}{I_0}\,\mathrm{dB} = 100\ \mathrm{dB}$;

   b) $I = \dfrac{P}{2\pi r^2} \Leftrightarrow P = I_1\cdot 2\pi r_1^2 = 10^{-2}\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cdot 2\pi\cdot(20\mathrm{m})^2 = 25{,}1\ \mathrm{W}$.

   c) Schmerzgrenze bei $L_S = 120$ dB: $\dfrac{I_1}{I_S} = \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2$; $I_2 = I_0\cdot 10^{\frac{L_S}{10\mathrm{dB}}} = 1\,\dfrac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$;
   $r_2 = r_1\cdot\sqrt{\dfrac{I_1}{I_S}} = 20\mathrm{m}\cdot\sqrt{\dfrac{10^{-2}}{1}} = 2\ \mathrm{m}$.

   d) $I = \dfrac{P}{2\pi r^2}$; $L(r) = 10\cdot\lg\dfrac{I(r)}{I_0}\,\mathrm{dB} = 10\cdot\lg\left(\dfrac{P}{2\pi r^2\cdot I_0}\right)\mathrm{dB}$;
   $L_3 = L(r_3) = 10\cdot\lg\dfrac{25{,}1\mathrm{W}\ \cancel{\mathrm{m}}^2}{2\mathrm{p}\cdot 30^2\ \cancel{\mathrm{m}}^2\cdot 10^{-12}\,\cancel{\mathrm{W}}}\,\mathrm{dB} = 96{,}5\ \mathrm{dB}$.

Einfacher wäre wohl gewesen: $\frac{I_3}{I_1} = \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2 \Leftrightarrow I_3 = I_1 \cdot \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2$;

$$L_3 = 10 \cdot \lg\left[\frac{I_1}{I_0} \cdot \left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2\right]\mathrm{dB} = 10\left[\lg\frac{I_1}{I_0} + \lg\left(\frac{r_1}{r_3}\right)^2\right]$$

$$= L_1 + 20 \cdot \lg\frac{r_1}{r_3} = 100\mathrm{dB} + 20\lg\frac{2}{3}\mathrm{dB} = 96{,}5\ \mathrm{dB}.$$

6. Zylinderwellen: $I_Z = \frac{P_1}{2\pi r} = \frac{a}{r}$;

Kugelwellen: $I_K = \frac{P_1}{4\pi r^2} = \frac{b}{r^2}$;

$\frac{I_Z}{I_K} = 1$, für $r_1 = 500$ m.

$\frac{I_Z}{I_K} = \frac{a \cdot r^2}{\cancel{r} \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot r$; für $r_1 = 500$ m: $\frac{I_Z}{I_K} = 1 = \frac{a}{b} \cdot r_1 \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{r_1}$;

für $r_2 = 2 \cdot r_1 \rightarrow \frac{I_Z}{I_K} = \frac{a}{b} \cdot r_2 = \frac{r_2}{r_1} = 2$;

$\frac{I_{\mathrm{Pfiff}}}{I_{\mathrm{Zug}}} = \frac{I_K}{I_Z} = \frac{1}{2}$, d.h. das Zuggeräusch ist lauter.

Die Schallpegel unterscheiden sich um $\Delta L = 3$ dB.

7. Gesamtschallpegel: $L_{\mathrm{ges}} = 10 \cdot \lg\left(\sum 10^{\frac{L_i}{10\mathrm{dB}}}\right)\mathrm{dB}$,

Intensität des leeren Hörsaals: $I_{\mathrm{leer}} = I_0 \cdot 10^{\frac{L_0}{10\mathrm{dB}}} = 1 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$;

Intensität eines Studenten: I_1.

Intensität von 100 Studenten: $100 \cdot I_1 \Rightarrow I_{\mathrm{ges}} = 100 \cdot I_1 + I_{\mathrm{leer}}$;

$L_{\mathrm{ges},100} = 10 \cdot \lg^{\frac{100 \cdot I_1 + I_{\mathrm{leer}}}{I_0}}\ \mathrm{dB} = 60\ \mathrm{dB}$;

$\frac{100 \cdot I_1 + I_{\mathrm{leer}}}{I_0} = 10^6 \Leftrightarrow 100 I_1 + I_{\mathrm{leer}} = 10^6 I_0 = 10^{-6}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$;

$100 I_1 = \left(10^{-6} - 10^{-8}\right)\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} = 9{,}9 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$;

$I_1 = 9{,}9 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2} \rightarrow L_1 = 39{,}956\,\mathrm{dB} \approx 40\ \mathrm{dB}.$

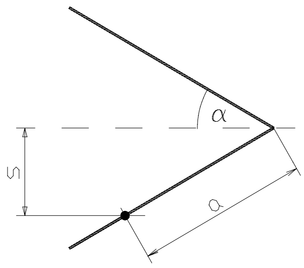
Pegel von 50 Studenten:

$I_{\mathrm{ges},50} = 50 \cdot I_1 + I_{\mathrm{leer}} = 5{,}05 \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{-2}}$; $L_{\mathrm{ges},50} = 10 \cdot \lg\frac{5{,}05 \cdot 10^{-7}}{10^{-12}}\mathrm{dB} = 57\ \mathrm{dB}.$

8. Beobachterfrequenz bei Annäherung: $f_{B1} = f_Q \frac{c+v}{c-v}$, bei Entfernung: $f_{B2} = f_Q \frac{c-v}{c+v}$.

Das Frequenzverhältnis beträgt $\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^2 = \frac{3}{2}$. Daraus folgt

$v = \frac{c}{2}\left(10 - \sqrt{96}\right) = 123{,}6 \text{ km/h}$.



9. Abstand zum Geschoß:

$a = \frac{s}{\sin\alpha} = 10 \text{ m}$.

10. Frequenz beim Empfänger:

$f_E = f_S \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \approx f_S\left(1 + 2\frac{v}{c}\right)$; relative Frequenzänderung: $\frac{\Delta f}{f_S} \approx 2\frac{v}{c} = 1{,}11\cdot 10^{-7}$,

Schwebungsfrequenz: $f_{Schweb} = f_E - f_S = 1 \text{ kHz}$.

11. Relativistischer Dopplereffekt,
Frequenz bei Annäherung:

$f_{B1} = f_Q\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \approx f_Q(1+\beta)$, mit $\beta = \frac{v}{c}$,

entsprechend gilt bei Entfernung: $f_{B2} \approx f_Q(1-\beta)$.

Frequenzunterschied: $\Delta f = f_{B1} - f_{B2} = 2 f_Q \frac{v}{c}$,

Wellenlängenunterschied: $|\Delta\lambda| = \frac{\Delta f}{f}\lambda = 2\lambda\frac{v}{c}$, daraus folgt v = 29,8 km/s.

12. $c = \lambda f = 2 l f_0 = 5100 \text{ m/s}$,
Frequenzen: $f_n = (n+1) f_0$, $\rightarrow f_1$= 5100 Hz, f_2= 7650 Hz, f_3= 10200 Hz, ...

13. Wellenlänge $\lambda = 2\,s = 24$ cm, Frequenz $f = c/\lambda = 1{,}25$ GHz; $c = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \approx c_0$.

14. Gleichung der hin laufenden Welle: $y_{hin} = \hat{y}\cos(\omega t - kx + \varphi)$;
Gleichung der zurück laufenden Welle: $y_{rück} = \hat{y}\cos(\omega t + kx + \psi)$;

Gleichung der stehenden Welle: $y_{steh} = 2\hat{y}\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cdot\cos\left(kx - \frac{\varphi-\psi}{2}\right)$.

a) Harte Wand, Randbedingung: Knoten bei x_0: $y_{steh}(x_0, t) = 0$ für alle Zeiten,

wird erfüllt durch $kx_0 - \frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\pi}{2}$ oder $\psi = \varphi - 2kx_0 + \pi$ (Phasensprung π).

Setzen wir willkürlich $\varphi = 0$, dann ist $\psi = \pi - 2kx_0$ und

$y_{steh} = 2\hat{y}\cdot\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - kx_0\right)\cdot\cos\left(kx + \frac{\pi}{2} - kx_0\right)$.

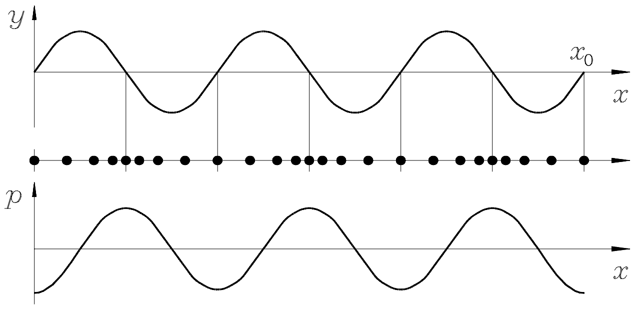
b) Weiche Wand, Randbedingung: Bauch bei x_0: $y_{steh}(x_0, t) = \text{Max}$ für alle Zeiten.

Wird erfüllt durch $kx_0 - \frac{\varphi - \psi}{2} = 0$ oder $\psi = \varphi - 2kx_0$ (kein Phasensprung).

Für $\varphi = 0$ folgt $y_{\text{steh}} = 2\hat{y} \cdot \cos(\omega t - kx_0) \cdot \cos(kx - kx_0)$.

c) Für den Fall der harten Wand lautet die Gleichung der stehenden Welle zu einem bestimmten Moment $\left(\omega t = \frac{\pi}{2} + kx_0\right)$:

$$y_{\text{steh}} = -2\hat{y} \cdot \cos\left(kx + \frac{\pi}{2} - kx_0\right).$$



Aus dem Momentbild der longitudinalen Welle geht klar hervor, dass an der Wand ein Druckbauch vorliegt. Druck und Auslenkung sind also um $\frac{\lambda}{4}$ phasenverschoben.

Für den Fall der weichen Wand, wo die Auslenkung y an der Wand einen Bauch hat, besitzt die Druckfunktion einen Knoten.

15. $\lambda_0 = 2l \rightarrow f_0 = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{c}{2l}$; $c = \sqrt{\frac{F}{A\rho}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$;

$$f_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \cdot \frac{1}{2l} = \sqrt{\frac{200\text{N} \quad \text{m}^3}{10^{-6}\text{m}^2 \cdot 785\text{kg}}} \cdot \frac{1}{2\text{m}} = 79{,}8\,\text{Hz}.$$

16. $f_\text{n} = (2n+1) \cdot f_0 = (2n+1) \cdot \frac{c}{4l}$; $f_0 = \frac{c}{4l} = \frac{340\,\text{m/s}}{0{,}2\text{ m}} = 1700\,\text{Hz}$;

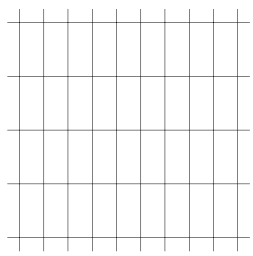
$f_1 = 5100\,\text{Hz}$; $f_2 = 8500\,\text{Hz}$; $f_3 = 11900\,\text{Hz}$; $f_4 = 15300\,\text{Hz}$; $f_5 = 18700\,\text{Hz}$.

17. Maxima entstehen für $\sin\alpha_m = m\frac{\lambda}{g}$,

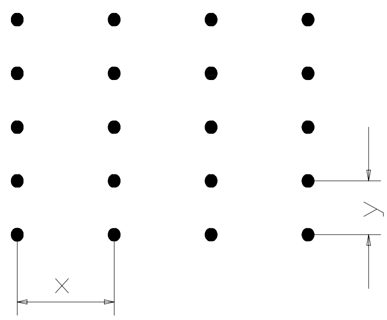
a) $\alpha_0 = 0$ °, $\alpha_1 = 90$ °,
b) $\alpha_0 = 0$ °, $\alpha_1 = 14{,}5$ °, $\alpha_2 = 30$ °, $\alpha_3 = 48{,}6$ °, $\alpha_4 = 90$ °.

18. Beugungsmaxima in 1. Ordnung:
<u>horizontal</u>:
$\sin\alpha_1 = \lambda/(1/150)\text{mm} = 0{,}0971$;
$x = 48{,}5$ cm,

<u>vertikal</u>:
$\sin\alpha_1 = \lambda/(1/75)\text{mm} = 0{,}0485$;
$y = 24{,}3$ cm.

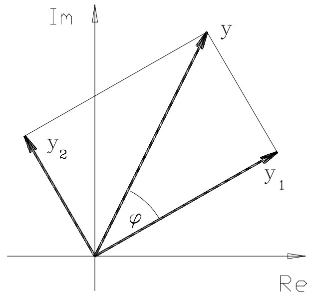


Gitter



Punktmuster

19. a) $\hat{y} = \sqrt{\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2} = 3{,}61 \cdot 10^{-4}$ m;



b) $\tan\varphi = \frac{2}{3} \rightarrow \varphi = 0{,}59$ rad.

20. a) $\omega_1 = 60\,\pi$ s^{-1}, $\lambda_1 = 11$ m, $k_1 = \frac{2\pi}{11\text{ m}} = 0{,}5712$ m^{-1}, $\omega_2 = 66\,\pi$ s^{-1}, $\lambda_2 = 10$ m,

$k_2 = \frac{2\pi}{10\text{ m}} = 0{,}6283$ m^{-1}, für $t = 0$ gilt: $y = y_1 + y_2 = 2\hat{y}\cos\frac{k_1 + k_2}{2}x \cdot \cos\frac{k_2 - k_1}{2}x$,

Abstand zweier Maxima: $s = \frac{2\pi}{k_2 - k_1} = 110$ m.

b) Für $x = 0$ gilt: $y = y_1 + y_2 = 2\hat{y}\cos\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\,\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$,

Schwebungsfrequenz: $f_S = f_2 - f_1 = 3$ Hz.

c) Keine Dispersion, somit Gruppengeschwindigkeit gleich Phasengeschwindigkeit:

$c_{gr} = 330\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

21. Gruppengeschwindigkeit: $c_{gr} = c - \lambda\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda}$.

Mittlere Phasengeschwindigkeit $c(850\text{ nm}) \approx \frac{c_0}{\frac{n_1+n_2}{2}} = 2{,}0638 \cdot 10^8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$,

Dispersion: $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}\lambda} \approx \frac{\Delta c}{\Delta\lambda} = \frac{\frac{c_0}{n_2} - \frac{c_0}{n_2}}{\lambda_2 - \lambda_1} = 2{,}2732 \cdot 10^{12}$ s^{-1}. Damit wird die

Gruppengeschwindigkeit: $c_{gr} = 2{,}0445 \cdot 10^8$ m/s, Gruppenindex $n_{gr} = c_0/c_{gr} = 1{,}4663$.

22. $\Phi = \dot{N} \cdot hf$; $hf = \frac{hc}{\lambda} = 2{,}1$ eV $= 3{,}37 \cdot 10^{-19}$ J;

$\dot{N} = 5$ s^{-1}.

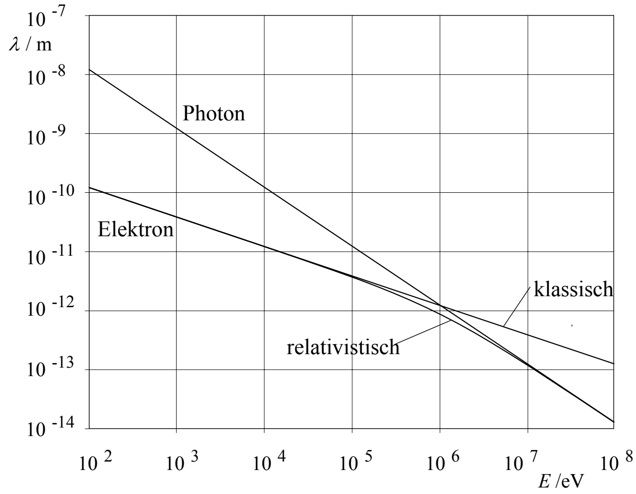
23. Klassische Betrachtung:

$\lambda_{ph} = \dfrac{h \cdot c}{E_{ph}} = 1{,}24\ \mu m$,

$\lambda_{el} = \dfrac{h}{p_{el}} = \dfrac{h}{\sqrt{2E_{el}m}} = 1{,}23\ nm$.

Gleiche Wellenlänge und Energie bei $E = 2mc^2 = 1{,}02$ MeV und

$\lambda = \dfrac{h}{2mc} = 1{,}22\ pm$.



Relativistische Rechnung für das Elektron:

$$\lambda_{el} = \frac{h}{m_0\, c \cdot \left(1 + \dfrac{eU}{m_0\, c^2}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(1 + \dfrac{eU}{m_0\, c^2}\right)^{-2}}}$$

Für $\dfrac{e\,U}{m_0\, c^2} >> 1$ gilt $\lambda_{el} = \dfrac{h\,c}{e\,U} = \lambda_{ph}$ $\rightarrow$ asymptotische Annäherung.