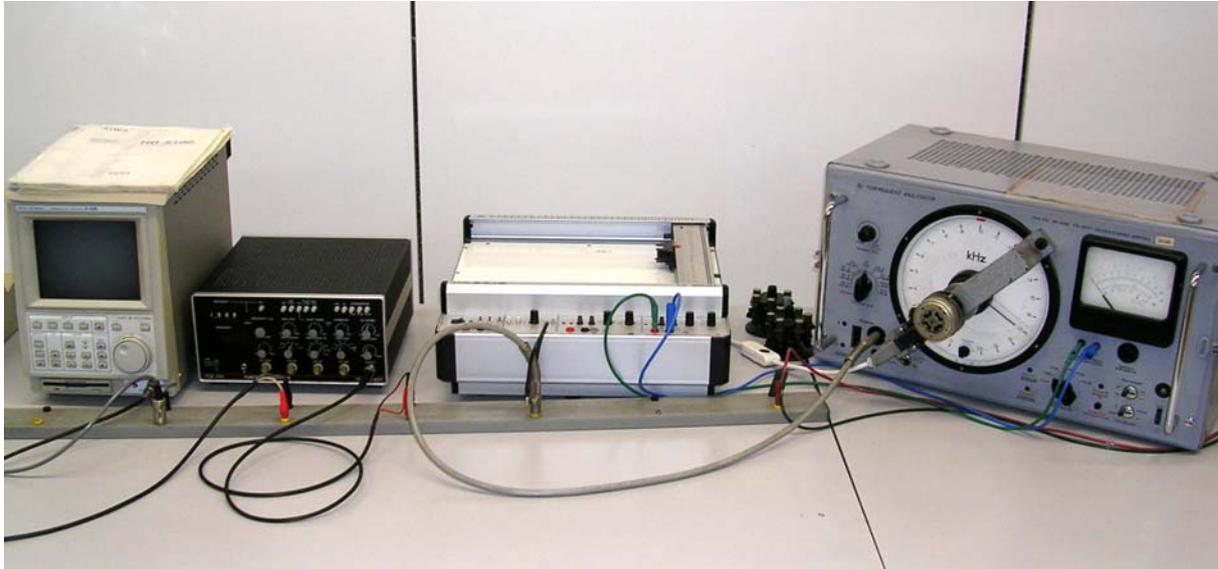


VISpektrale Zerlegung einer periodischen Funktion: Fourier Analyse



1 Überlagerung von Schwingungen

Physikalische Größen können sich periodisch mit der Zeit ändern (z.B.: Auslenkung eines Feder-Masse Systems, Spannung an den Bauelementen eines elektrischen Schwingkreises). Ein *periodischer* Vorgang wiederholt sich in gleichen Zeitabständen T (*Periodendauer*), so dass gilt:

$$f(t) = f(t + T) \text{ für alle } t! \quad (1)$$

Wird ein periodischer Vorgang durch eine Sinus- oder Cosinusfunktion beschrieben, nennt man ihn einen *harmonischen* Vorgang:

$$y = \hat{y} \sin(\omega t + \varphi), \quad (2)$$

mit der *Kreisfrequenz* $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ und dem *Nullphasenwinkel* φ .

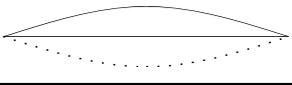
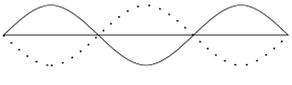
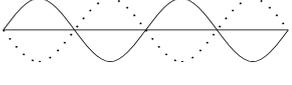
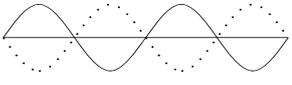
Die Überlagerung (Superposition) harmonischer Vorgänge nennt man *harmonische Synthese*.

$$y = \sum_{k=1}^N \hat{y}_k \sin(\omega_k t + \varphi_k) \quad (3)$$

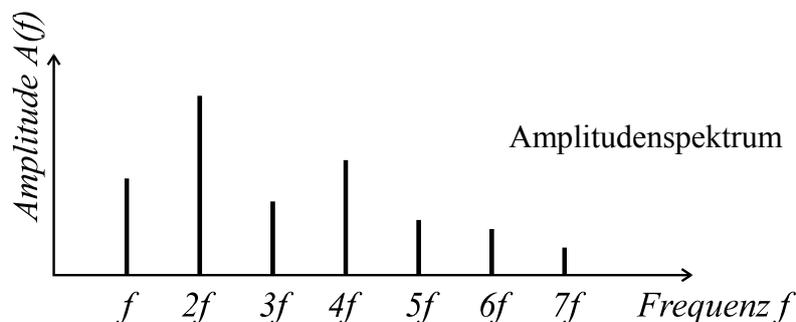
Dabei ist die Überlagerungsschwingung nur dann eine periodische Funktion, wenn die Einzel-frequenzen der überlagerten harmonischen Einzelschwingungen in einem rationalen Verhältnis zueinander stehen, d.h. für

$$f_1 : f_2 : \dots : f_N = m : n : \dots : p; \quad \text{mit } m, n, \dots p \text{ ganzzahlig.}$$

Als Beispiel sei eine transversal schwingende Saite genannt. Sie besitzt verschiedene Resonanzfrequenzen oder Eigenschwingungen.

Eigenschwingung	Schwingungsform	Wellenlänge der Eigenschwingung	Eigenfrequenz
Grundschiwingung		$\lambda_0 = 2L$	f_0
1. Oberschiwingung		$\lambda_1 = \frac{1}{2} \lambda_0 = L$	$f_1 = 2f_0$
2. Oberschiwingung		$\lambda_2 = \frac{1}{3} \lambda_0 = \frac{2}{3} L$	$f_2 = 3f_0$
3. Oberschiwingung		$\lambda_3 = \frac{1}{4} \lambda_0 = \frac{1}{2} L$	$f_3 = 4f_0$
4. Oberschiwingung		$\lambda_4 = \frac{1}{5} \lambda_0 = \frac{2}{5} L$	$f_4 = 5f_0$
k. Oberschiwingung		$\lambda_k = \frac{1}{k+1} \lambda_0 = \frac{2}{k+1} L$	$f_k = (k+1)f_0$

Es können mehrere Eigenfrequenzen gleichzeitig angeregt sein. Das Ergebnis der Überlagerung ist im Allgemeinen eine komplizierte, nicht mehr harmonische aber immer periodische Schwingungsform. Trägt man die jeweiligen Amplituden über der respektiven Eigenfrequenz auf, dann erhält man das *Amplitudenspektrum*; es enthält aber keine Information über die Phasenlage der Einzelschwingungen zur Zeitachse.



Die Klangfarbe verschiedener Musikinstrumente beruht bei gegebener Grundschiwingung auf der Verschiedenartigkeit des für jedes Musikinstrument und jede Spielart charakteristischen Amplitudenspektrums der Oberschwingungen.

2 Fourier-Analyse (Fourier-Zerlegung)

Die Fourier-Analyse (harmonische Analyse) ist die Umkehrung der harmonischen Synthese. Sie gibt Antwort auf die Frage: Welche harmonischen Schwingungen sind mit welchen Amplituden in einem vorgegebenen periodischen Vorgang enthalten? Der Fourier-Analyse liegt folgende Zerlegung in harmonische Anteile zugrunde (*Fourier-Reihe*):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)). \quad (4)$$

Dabei ergeben sich die *Fourier-Koeffizienten* gemäß

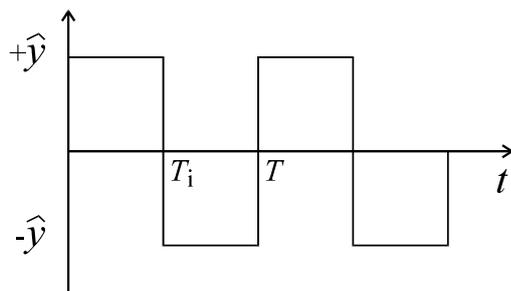
$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ und} \quad (5a)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5b)$$

Die Gesamtamplitude im Fourier-Spektrum beträgt

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad (6)$$

Beispiel: Rechteck-Funktion



$$f(t) = +\hat{y} \quad \text{für } 0 \leq t \leq T_i$$

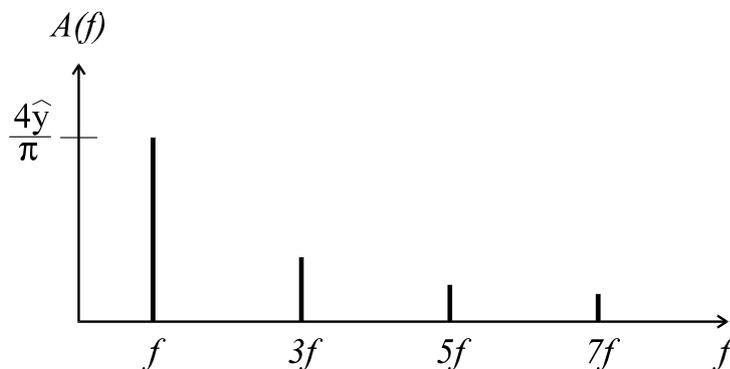
$$f(t) = -\hat{y} \quad \text{für } T_i < t < T$$

$$\text{Tastverhältnis } q = T_i/T = 1/2$$

Für die Rechteck-Funktion mit dem Tastverhältnis 1:2 ergibt sich nach Bestimmen der Fourier-Koeffizienten die Fourier-Reihe:

$$f(t) = \frac{4\hat{y}}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \quad (7)$$

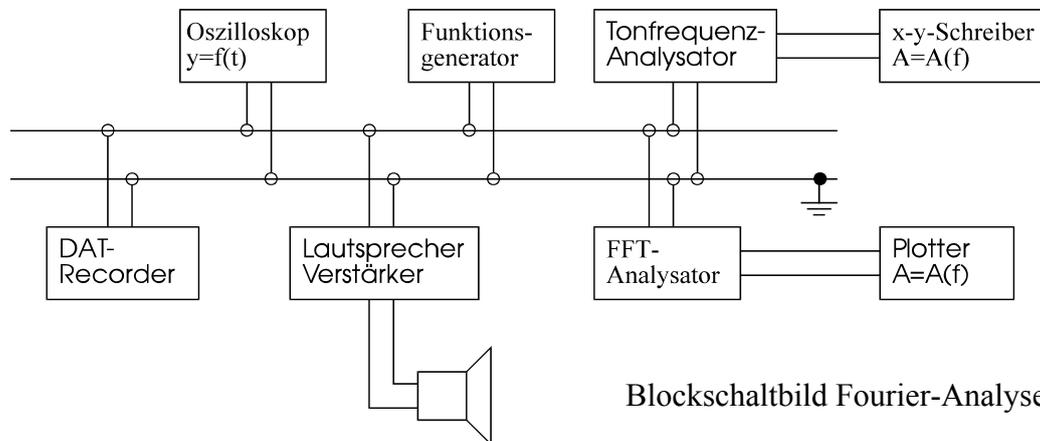
Das Spektrum sieht demnach folgendermaßen aus:



Amplitudenspektrum bei einem Tastverhältnis 1:2

3 Experimentelle Anordnung und Hinweise

Beachten Sie unbedingt die zu jedem Gerät am Platz liegenden Betriebsanleitungen!



Am Funktionsgenerator (Rechteckgenerator mit veränderbarem Tastverhältnis) wird das jeweils erforderliche Tastverhältnis eingestellt. Das Oszilloskop zeigt die Funktion $f(t)$ an. Mittels Tonfrequenzanalysator wird deren Amplitudenspektrum $A(f)$ am x - y -Schreiber ausgegeben. Der Nullphasenwinkel der einzelnen spektralen Anteile wird dabei nicht angezeigt! Der FFT-Analysator (FFT = Fast-Fourier-Transformation) zeigt das Amplitudenspektrum direkt via Monitor an. Das Amplitudenspektrum kann hier ebenfalls ausgeplottet werden.

Der Tonfrequenzanalysator besteht aus vier Teilen:

1. Eingangsteil mit Vor- und Hauptteiler zur Anpassung des Eingangssignals an die nachfolgenden Stufen.
2. Mischstufe und Oszillator: Ähnlich wie bei einem Heterodyn-Empfänger werden die Eingangsfrequenzen durch Mischen mit einer Oszillatorfrequenz von 60 kHz angehoben.
3. Zwischenfrequenzteil: In diesem Verstärker kann wahlweise ein breitbandiges (200 Hz) oder ein schmalbandiges (6 Hz) Filter geschaltet werden; d.h. man hat einen abstimmbaren, selektiven Verstärker.
4. Anzeigeverstärker: Über zwei Resonanzverstärkerstufen wird von der zu messenden Sinus-Frequenz der Effektivwert der Wechselspannung an einem Messgerät angezeigt und über eine Zweiweggleichrichtung mit Integrator der Amplitudenwert der Wechselspannung an einen Schreiber gelegt.

Bei dem (etwas älteren) Röhrengerät wird der Frequenzbereich linear von oben nach unten durch ein Potentiometer mit Zeiger abgetastet. Ein angeflanschter 220V-Motor ermöglicht frequenzabwärts eine automatische Analyse. Synchron dazu kann durch einen x - y -Schreiber mit linearem Vortrieb ein Amplitudenspektrum aufgezeichnet werden (Aufgabe 2).

Arbeitsweise des FFT-Analysators:

Die *Fast Fourier Transformation* wird dazu verwendet, mithilfe eines Computers die spektrale Zerlegung eines zeitkontinuierlichen Signals zu berechnen. Einzelne Signalproben (z.B. x_1 , x_2 und x_3) werden als Zahlenwert über einen A/D-Wandler in einen Rechner eingelesen. Die-

ser rechnet die Signalproben in ein Frequenzspektrum um mit Angaben über Amplitude und Phasenlage der Teilschwingungen.

Beachten Sie die am Platz vorliegende Kurzanleitung! Wählen Sie die Einstellungen für Frequenzbereich und maximale Amplitude aus der Tabelle.

Zur Erleichterung: Laden Sie die Überschriften und Voreinstellungen von der Diskette. Hierzu auf dem Monitor auf DISK gehen, dort auf LOAD (Voreinstellung). Statt CRT.DATA die Einstellung PANEL COND. wählen und z.B. das File TAST_001.CND (Aufgabe 4). Ausführen mit EXECUTE. Fügen Sie bei genanntem Beispiel in der Kopfzeile das jeweilige Tastverhältnis ein. Zur Analyse der Musikinstrumente laden Sie genauso das dazu entsprechende File.

Folgende Einstellungen werden bei Laden von Diskette automatisch vorgenommen:

- Amplitudenanzeige auf "V" (linear), Voreinstellung: logarithmisch dBV
- Amplitudenbereich
- Frequenzbereich
- Kopfzeile
- Cursorart auf *PEAK* (Cursor setzt sich automatisch auf die größte Amplitude)

Ausplotten:

Der FFT-Analysator muss sich dazu in Pausenstellung befinden. Betätigen Sie dazu die "PAUSE"-Taste. Mit "COPY" wird der Plotvorgang aktiviert.

Zur Bedienung des FFT-Analysators, des Plotters und v.a. des DAT-Rekorders **beachten** Sie bitte die am Messplatz bereitliegenden **Kurzanleitungen**! Nehmen Sie entweder alle Einstellungen manuell vor, oder laden Sie das jeweilige voreingestellte File von der Diskette.

Funktionsgenerator TOE 7402:

Stellen Sie den Schalter *FUNCTION* auf Rechtecksignal. Das Tastverhältnis $q = 1:2$ erhalten Sie automatisch und ganz genau mit ausgeschalteter Tastverhältnisregelung (*VAR SYMMETRY*). Zur Veränderung des Tastverhältnisses schalten Sie die *VAR SYMMETRY* ein. (LED leuchtet.) Beachten Sie, dass die Frequenz um eine Zehnerpotenz zurückgeht. Ändern Sie entsprechend den Frequenzbereich (*frequency range*) und regeln Sie die Frequenz nach.

Frequenzeinstellung: grob ==> mit größerem Potentiometer *FREQUENCY*
 fein ==> mit kleinerem Potentiometer *FREQ OFFSET*

Einstellen der Amplitudenhöhe: Am alten Röhrenanalysator manuell A_{\max} suchen (bei welcher Frequenz wird die bei einem 1 kHz-Rechtecksignal wohl sein?) und Amplitude am Funktionsgenerator auf einen vernünftigen Wert einstellen, d.h. so dass das Papierformat ausgefüllt wird. Beim Arbeiten mit dem FFT, so dass der Bildschirm gut ausgefüllt ist.

x-y-(hier y-t-) Schreiber:

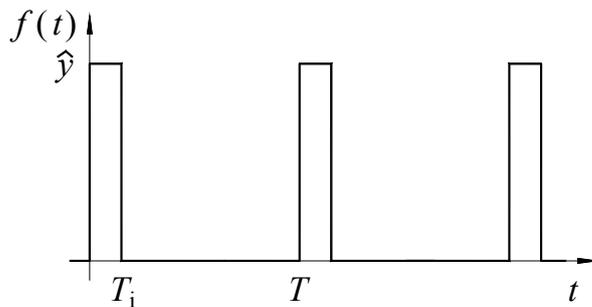
Parameter an Schreiber sind bereits eingestellt, sonst als x-Koordinate Zeit verwenden, y ist die Amplitude. Schreiber auf t stellen ==> linearer Vortrieb.

Der Stift des Schreibers darf nicht an den Anschlag laufen, da der Schreiber sonst beschädigt werden kann!

4 Aufgaben und Fragen

Beachten Sie, dass immer nur entweder der Funktionsgenerator oder der DAT-Recorder an der Buchsen-Leiste aufgeschaltet ist. Nie beide gleichzeitig!!

1. Berechnen Sie zur Vorbereitung des Versuchs die Fourierkoeffizienten a_k und b_k sowie die resultierende Amplitude A_k für folgende Rechteckfunktion:



- a) allgemein mit dem Tastverhältnis $q = T_i/T$,
- b) speziell für $q = 1/2$,
- c) speziell für $q = 1/3$.

2. Bestimmen Sie experimentell mit Hilfe des älteren Tonfrequenzanalysators und des x - y -Schreibers die Amplitudenspektren zweier Rechteckfunktionen mit $f = 1$ kHz und
 - a) dem Tastverhältnis $q = 1/2$
 - b) dem Tastverhältnis $q = 1/3$

im Bereich von 20 kHz bis ca. 500 Hz.

Achten Sie auf die Störampplitude bei 100 Hz !

(Rechtzeitig vorher den Motor ausschalten)

3. Vergleichen Sie in Ihrer Ausarbeitung Theorie und Experiment für die beiden Tastverhältnisse $q = 1/2$ und $q = 1/3$. Stellen Sie dazu in einer Tabelle Ihre berechneten sowie die gemessenen Werte für die Amplitude A_k sowie die jeweiligen Abweichungen zusammen.

Alle weiteren Aufgaben werden mittels FFT-Analysator und angeschlossenem Plotter durchgeführt! Hierzu dessen Gebrauchsanleitung beachten!!

- Setzen Sie dazu das "Stiftkarussell" in den Plotter ein. Entfernen Sie vorher alle Deckel von den Stiften.
 - Nach Beendigung der Versuche werden diese wieder aus dem Plotter entfernt, die Deckel aufgesetzt und mit den Spitzen nach unten abgelegt!
4. Ermitteln Sie experimentell mittels FFT-Analysators, wie sich das Amplitudenspektrum ändert, wenn die Tastverhältnisse immer extremer ($q = 1/8$ und $q = 1/9$) werden. Stellen Sie die Frequenzachse auf 20 kHz. Ändern Sie die y -Achse auf "V" (linear), Voreinstellung: logarithmisch dBV. Die y -Achsen-Skalierung wird entsprechend der Amplituden gewählt. (Entfällt alles bei Laden des Files *TAST_001* von Diskette.)
 5. Analysieren Sie experimentell den Klang von fünf Musikinstrumenten aus der unten stehenden Liste, die auf dem beigelegten Band des DAT-Rekorders gespeichert sind. Bedienungsanleitung beachten! Der Frequenzbereich und die maximale Amplitudenhöhe der fünf Spektren werden nach der untenstehenden Liste eingestellt oder von der Diskette im FFT - Analysator geladen. Plotten Sie die Spektren aus.

Verzeichnis der Musikinstrumente:

Nr.	Musikinstrument	Frequenzbereich	max. Amplitude ¹	Filename ²
1.	Stimmgabel 1 a' = 440 Hz	1000 Hz	0,5 V	Stim_001.cnd
2.	Stimmgabel 2 "Schwebung"	500 Hz	0,4 V	Stim_002.cnd
3.	Orgelpfeifen 1 "Salicional"	2 kHz	0,7 V	Orge_001.cnd
4.	Orgelpfeifen 2 "Salicional"	2 kHz	0,7 V	Orge_002.cnd
5.	Orgelpfeifen 3 "Salicional"	2 kHz	0,6 V	Orge_003.cnd
6.	Orgelpfeifen 4 "Dreiklang"	2 kHz	0,3 V	Orge_004.cnd
7.	Klarinette 1	4 kHz	0,4 V	Klar_001.cnd
8.	Klarinette 2	4 kHz	0,8 V	Klar_002.cnd
9.	Klarinette 3	4 kHz	0,4 V	Klar_003.cnd
10.	Klarinette 4 "Vibrato"	(4 kHz) und v.a. 500 Hz	0,4 V	Klar_004.cnd
11.	Baritonhorn 1, Pedalton (tiefes B)	2 kHz	0,2 V	Bari_001.cnd
12.	Baritonhorn 2, Pedalton (tiefes B)	2 kHz	0,2 V	Bari_002.cnd
13.	Baritonhorn 3, Pedalton (tiefes B)	2 kHz	0,3 V	Bari_003.cnd
14.	Trompete 1	10 kHz	0,3 V	Trom_001.cnd
15.	Trompete 2 "gestopft"	20 kHz	0,2 V	Trom_002.cnd
16.	Trompete 3 "gestopft"	20 kHz	0,2 V	Trom_003.cnd
17.	Klarinette Grundton	2 kHz	0,4 V	Klar_005.cnd

! Wichtig !

Beachten Sie unbedingt die bei den Geräten liegenden Gebrauchsanleitungen !

¹Abweichungen möglich

²siehe Diskette im FFT-Analyser