

### III Bestimmung der Gravitationskonstanten

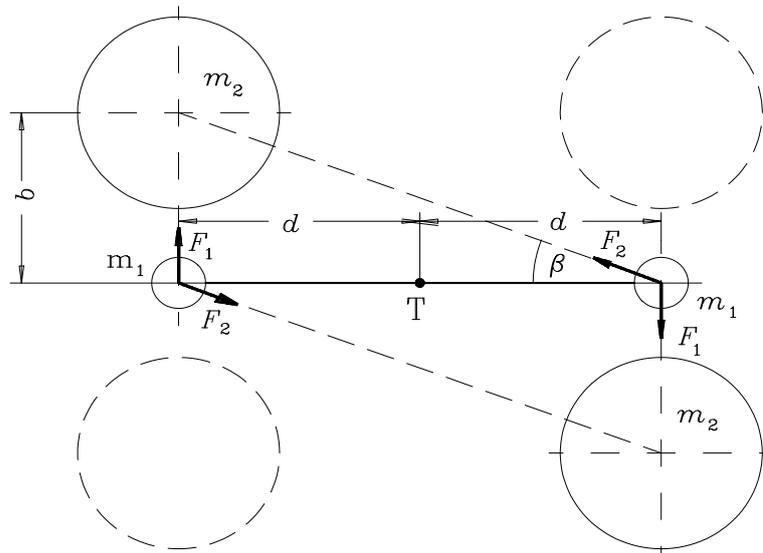


Die Gravitationskonstante  $G$  ist eine universelle Naturkonstante, die für die Gravitationswechselwirkung zwischen Körpern fundamentale Bedeutung hat. Nach NEWTON gilt für die Anziehungskraft zwischen zwei Punktmassen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$ :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} . \quad (1)$$

Die Gravitationskonstante wird mit einer Drehwaage nach CAVENDISH bestimmt.

#### 1 Beschleunigungsmethode



Auf die beiden kleinen drehbar aufgehängten Kugeln wirken die Kräfte  $F_1$  und  $F_2$  der beiden großen Kugeln. Dadurch wirkt ein Drehmoment  $M$  auf den Waagebalken, das im Gleichgewicht durch die Verdrillung des Torsionsfadens T kompensiert wird:

$$M = Gk(1 - \sin^3 \beta) \quad (2)$$

mit

$$k = \frac{2m_1 m_2 d}{b^2} \quad (3)$$

und

$$\sin^3 \beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{3/2}} \quad (4)$$

Werden die großen Kugeln vorsichtig in die gestrichelte Stellung gedreht, dann wirkt unmittelbar nach dem Umlegen das Drehmoment

$$M = 2Gk(1 - \sin^3 \beta) = J\alpha \quad (5)$$

auf den Waagebalken, wodurch dieser die Winkelbeschleunigung  $\alpha$  erfährt. Das Massenträgheitsmoment ist

$$J \approx 2m_1 d^2. \quad (6)$$

Die Drehung wird angezeigt durch einen Laserstrahl, der an einem Spiegel reflektiert wird, der am Waagebalken befestigt ist. Ist  $L$  der Abstand zwischen Spiegel und Wand und  $a$  die gemessene Beschleunigung des Laserreflexes, dann gilt für die Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{a}{2L}. \quad (7a)$$

Zur Messung wird unmittelbar nach Umlegen der Kugeln ca. 2 min lang alle 10 s der Ort  $s$  des Laserreflexes abgelesen.

Für den Ort  $s(t)$  gilt bei beschleunigten Bewegungen

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0. \quad (7b)$$

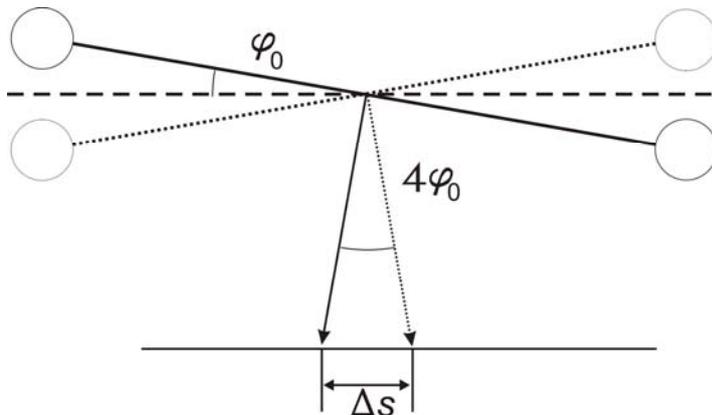
Da in diesem Fall die Anfangsgeschwindigkeit Null ist, können Sie aus einer graphischen Auftragung  $s$  über  $t^2$  die Beschleunigung  $a$  bestimmen. Die Steigung  $m$  der Ausgleichsgeraden liefert die Beschleunigung:

$$a = 2m \quad (7c)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (2) bis (7a) können Sie daraus die Gravitationskonstante  $G$  berechnen.

**Daten:**  $d = 50$  mm,  $b = 47$  mm,  $m_2 = 1,5$  kg.

## 2 Endausschlagmethode



Nach genügend langer Zeit stellt sich ein neuer Gleichgewichtszustand ein. Dabei hat sich der Waagebalken insgesamt um  $2\varphi_0$  gedreht. Für das Drehmomentengleichgewicht gilt:

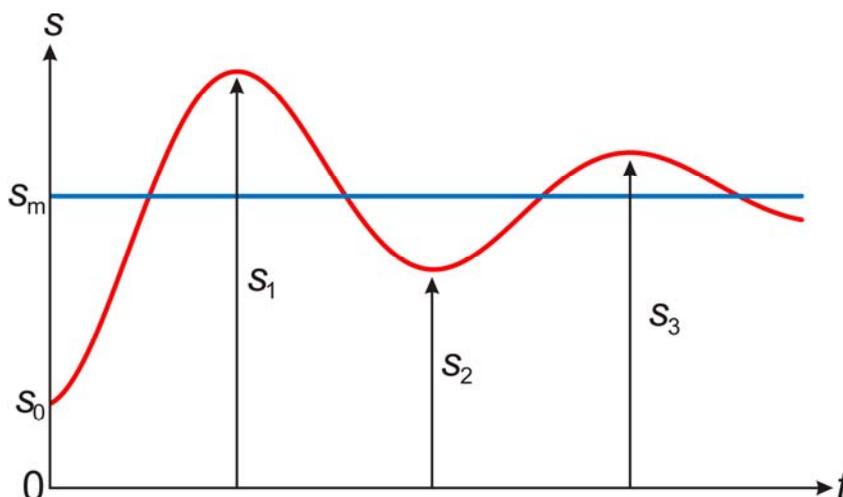
$$M = Gk(1 - \sin^3 \beta) = k_t \varphi_0. \quad (8)$$

Ist der Abstand der Laserreflexe in den Ruhelagen  $\Delta s$ , so gilt für die Gravitationskonstante

$$G = \frac{k_t \Delta s}{4Lk(1 - \sin^3 \beta)}. \quad (9)$$

Die Drehfederkonstante  $k_t$  des Torsionsfadens wird aus der Schwingungsdauer  $T_0$  der Dreh-schwingung bestimmt:

$$k_t = \frac{4\pi^2 J}{T_0^2}. \quad (10)$$



Zur Bestimmung von  $G$  wird der Weg des Lichtreflexes über drei Schwingungen als Funktion der Zeit aufgetragen. Dafür sind die Werte etwa alle 30 s abzulesen.

Aus dem Diagramm lässt sich dann die neue Ruhelage  $s_m$  extrapolieren.

Bei gedämpften Schwingungen ist das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden Amplituden konstant:

$$\frac{s_1 - s_m}{s_m - s_2} = \frac{s_m - s_2}{s_3 - s_m}. \quad (11)$$

Verwenden Sie den Zusammenhang (11), um aus den ersten drei Extrema die Ruheposition  $s_m$  zu bestimmen.

Da die genaue Anfangsposition nicht bekannt ist, wird sie ebenfalls aus den bekannten Extrema berechnet. Hierbei stellt die ursprüngliche Auslenkung das „Extremum nullter Ordnung“ dar, weshalb das Verhältnis der Amplituden ebenfalls konstant ist:

$$\frac{s_m - s_0}{s_1 - s_m} = \frac{s_1 - s_m}{s_m - s_2} . \quad (12)$$

Hieraus lässt sich die Differenz der Ruhelagen  $\Delta s = |s_m - s_0|$  bestimmen.

### 3 Hinweise zur Versuchsdurchführung

**Gravitationswaage nicht berühren!**

**Die Kugeln dürfen nur vom Assistent oder Laborleiter umgedreht werden !!  
Sie können nur jeden halben Tag einmal umgelegt werden !**

Für beide unterschiedlichen Auswertemethoden werden dieselben Messwerte verwendet. Kontrollieren Sie vor Versuchsbeginn einige Minuten lang die "Ruhelage" des Laserflecks. Aus den Schwankungen lässt sich nach beispielsweise 10 Minuten ( $\hat{=}$  10 Messungen) der statistische Fehler berechnen.

### 4 Fragen und Aufgaben

1. Welche systematischen Fehler hat die Messung?
2. Welche Rolle spielt der oben bestimmte statistische Fehler?
3. Wie lauten die KEPLER'schen Gesetze der Planetenbewegung?
4. Welche fundamentalen Wechselwirkungen gibt es, und was sind die Unterschiede zur Gravitationswechselwirkung?
5. Leiten Sie die für die Auswertung benötigten Gleichungen her!